دورهٔ جبر

برای سال دوم دبیرستانها

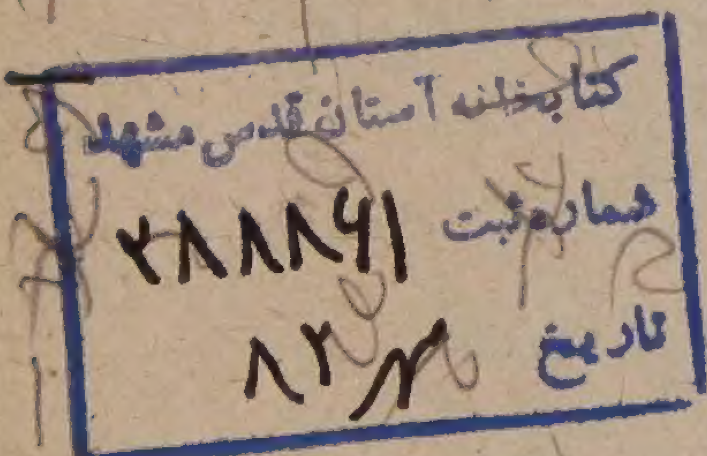
مطابق آخرین برنامه وزارت فرهنگ

تألیف

حسن صفاری

ابوالقاسم قربانی

معلمین علوم ریاضی



چاپ دوم

با تجدید نظر و اصلاح

سال ۱۳۲۷

کتابفروشی و چاپخانه علی اکبر علمی و شرکاء

فصل اول - استعمال حروف بجای اعداد

۱ - موضوع جبر - در جبر مانند حساب از کمیات و اعداد و اعمال راجع بآنها گفتگو میشود

در حساب اعداد را که حاصل سنجش کمیات با آحادی از جنس خودشان میباشند بوسیلهٔ ارقامی نمایش میدهند که دارای معنی و مفهوم مشخصی میباشند و هریک از آنها در موارد مخصوصی مورد استعمال دارند، در جبر غالب اعدادی را که در مسائل بکار میروند بوسیلهٔ حروف الفباء نمایش میدهند و اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم وغیره را همچنانکه در حساب انجام میدادیم با همان علامات بخصوص در مورد حروف انجام میدهند و هروقت لازم شد بجای هرکدام از حروف مزبور هر عدد دلخواهی را که بخواهند قرار میدهند بدینطریق چنانکه ضمن چند مثال خواهیم دید مسائل حساب را عمومیت داده حل مسائلی را که از یک نوع میباشند و اختلاف آنها فقط در اختلاف اعداد است بحل یک مسئله کلی رجوع مینمایند

گذشته ازاین در جبر از طول کلام کاسته قضایای حساب یا هندسه را بصورت دستورهای ساده ای در میآوریم که حفظ کردن و بکار بستن آنها سهلتر است مثلاً بجای آنکه بگوئیم

مساحت مثلث = نصف طول ارتفاع × طول قاعده

یا مساحت مثلث = نصف طول قاعده × طول ارتفاع

مساحت مثلث را با حرف S و قاعدهٔ آنرا با حرف a و ارتفاع آنرا با حرف h نمایش داده هردو عبارت فوق را در دستور سادهٔ زیر خلاصه مینمائیم

$$S = \frac{a \times h}{۲}$$

هروقت بجای a اندازهٔ طول قاعده را برحسب واحد مفروض و بجای h اندازهٔ ارتفاع را برحسب همان واحد قرار دهیم اندازهٔ مساحت برحسب واحد مربع بدست میآید مثلاً اگر $a =$ ۱۲ سانتیمتر و $h =$ ۸ سانتیمتر باشد خواهیم داشت :

$$S = \frac{۱۲ \times ۸}{۲} = ۴۸$$ سانتیمتر مربع

۲ - حروف و علامات متداول در جبر - تمام حروف بزرگ و کوچک الفبای لاتین یا حروف یونانی وغیره در جبر معمول بوده بکار

میروند: a و t و A و M و α و B وغیره

وقتی بخواهند چند مقدار متشابه را نمایش بدهند یک حرف بکار برده بالای آن و قدری متمایل بسمت راست یک یا چند زبر میگذارند :

a و a' و a'' و ....

و عادت براین جاری شده است که آنهارا بترتیب a پریم و a سگوند و a ترس و ..... تلفظ مینمایند

علامات متداول در جبر در مورد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و تساوی و تناسب و جذر و کعب وغیره همانها است که در حساب بکار میروند :

$a+b$ یا $a+6$ نشان آنست که عدد a با عدد b یا با عدد ۶ باید جمع شود . $a-b$ یا $12-x$ نشان میدهند که باید عدد سمت راست را از عدد سمت چپ کم کرد در مورد ضرب دو عدد بجز علامت $\times$ که در حساب معمول میباشد علامات دیگری نیز بکار میبرند که در حساب متداول نیست مثلاً حاصلضرب عدد a در عدد b را میتوان بهر یک از صورتهای زیر نوشت $a \times b$ یا $b \times a$ یا $a.b$ بوسیله یک نقطه از هم جدا میشوند و همین نقطه خود علامت ضرب است) یا ab (مضروب و مضروب فیه را بتوالی هم مینویسند) و طریقه اخیر متداولترین طرق است . مثلاً اگر $a=2$ و $b=3$ باشد داریم

$$ab = a \times b = a.b = 2 \times 3 = 6$$

واضح است که نوشتن اعداد بتوالی یکدیگر در حساب مورد ندارد مثلاً 3×2 را نمیتوان بصورت ۲۳ که دارای مفهوم دیگری است نوشت

وقتی از دو مقدار که درهم ضرب میشوند یکی عدد و دیگری حرف باشد عدد مزبور را ضریب دیگری مینامند مثلاً $5 \times a = 5a$

عدد پنج در اینجا ضریب عدد a میباشد

صور $\frac{a}{b}$ یا $a:b$ و $x=y$ وغیره همان مفهومی را دارند که در حساب دارا بوده اند .

بجز علامات فوق علامتهای دیگری در جبر بکار میروند که در حساب متداول نیست:

$a \neq b$ و $x \neq 5$ نشان میدهد که دو مقدار واقع در طرفین علامت با یکدیگر مختلف اند

مثلاً $4 \neq 5$ و $x+4 \neq x-2$ است

علامت > یا < برای آن بکار میرود که نشان بدهند عددی از عدد دیگر بزرگتر یا از آن کوچکتر است و همواره عدد بزرگتر را در داخل زاویه محدب مینویسند $a > b$ یا $b < a$ چنین خوانده میشوند a بزرگتر است از b یا b کوچکتر است از a یعنی در هر حال عدد a از عدد b بزرگتر است .

پس $۱۱ > ۵$ و $۷ > ۴$ و $۷ - ۴ > ۳ - ۲$ است

علامات ≥ یا ≤ وقتی بکار میروند که بخواهیم بنویسیم عددی از عدد دیگر بزرگتر یا کوچکتر است و ممکن است احتمالاً بحدّ اکثر یا بحدّ اقل با دیگری مساوی گردد مثلاً $x \leq y$ چنین خوانده میشود x کوچکتر یا مساوی y است و یا اینکه y بزرگتر یا مساوی با x است

۳ - عبارت - مجموعهٔ چند عدد و علامات مقابل آنها را که نشانهٔ اعمالی است که باید در مورد آن اعداد انجام گیرد یک عبارت مینامند

مثلاً $۳۶ + ۴ \times ۳ - ۷۲ : ۹$ یک عبارت است

در محاسبهٔ یک عبارت باید ابتدا اعمال ضرب و تقسیم را بترتیب از چپ براست انجام داده و سپس مقادیر حاصل را جمع و تفریق کرد مثلاً

$$۳۴ + ۴ \times ۳ - ۷۲ : ۹ = ۳۴ + ۱۲ - ۸ = ۳۸$$

ونیز

$$۱۸ : ۹ \times ۶ - ۲۶ \times ۵ : ۱۳ = ۲ \times ۶ - ۱۳۰ : ۱۳ = ۱۲ - ۱۰ = ۲$$

۴ - پرانتز و کروشه و آکولاد - همچنانکه در حساب سال اول دیدیم وقتی یک عبارت در داخل یک پرانتز نوشته شود نشانهٔ آنست که تمام مقادیر آن عبارت حکم مقدار واحدی را پیدا کرده اند و هر یک از اعمال اصلی که علامت آن مقابل پرانتز نوشته شده باشد باید در مورد حاصل تمام مقادیر داخل پرانتز اجرا گردد مثلاً $۷(۵+۴)$ نشان میدهد که باید عدد ۷ در مجموع ۵ و ۴ و یا در یک یک آنها ضرب شود پس

$$۷(۵+۴) = ۷ \times ۹ = ۷ \times ۵ + ۷ \times ۴ = ۳۵ + ۲۸ = ۶۳$$

و $۵ + (x - ۱)$ نشانهٔ آن است که باید تمام حاصل پرانتز را بر عدد ۵ اضافه کرد وقتی در عبارتی چند پرانتز وجود داشته باشد و بخواهند عمل واحدی را در مورد تمام آن عبارت انجام دهند آن عبارت را در داخل یک کروشه [ ] قرار میدهند مثلاً

$$۱۱ \left[۵ - (۷ \times ۳ - ۵ \times ۴) + ۱۱(۳ - ۱) \right] =$$

$$۱۱\left[۵-(۲۱-۲۰)+۱۱\times۲\right]=۱۱\left[۵-۱+۲۲\right]=۱۱\times۲۶=۲۸۶$$

بهمین طریق اگر عبارتی شامل چند گروشه باشد و بخواهند عمل واحدی را درمورد تمام آن عبارت انجام دهند تمام آن عبارت را داخل یک آکولاد $\{\ \}$ قرار میدهند

۵ - چگونه استعمال حروف موجب سهولت و تعمیم مسائل حساب میگردد

- پس از بیان مقدمات فوق میتوان بوسیلهٔ چند مثال چگونگی سهولتی را که استعمال حروف در حل مسائل حساب پدید میآورد نشان داد

مثال - سن پدری ۴۳ سال و سن پسرش ۷ سال است معلوم کنید پس از چند سال سن پدر سه برابر سن پسر میشود

حل حسابی - چون سن پدر سه برابر سن پسر شود اختلاف سن آنها دو برابر سن پسر خواهد بود و از طرف دیگر اختلاف سن پدر و پسر همیشه مقدار ثابت $۴۳-۷=۳۶$ سال است پس بعد از انقضاء مدت مزبور دو برابر سن پسر ۳۶ سال و سن وی در آنوقت $\frac{۳۶}{۲}$ یا ۱۸ سال خواهد بود بنابر این مدت مطلوب اختلاف سن وی در آنوقت با سن کنونی او یعنی $۱۸-۷=۱۱$ سال میباشد.

حل جبری - اگر مدت مزبور را x فرض کنیم پس از انقضاء این مدت سن پدر $x+۴۳$ و سن پسر $x+۷$ است و چون بفرض مقدار اول سه برابر مقدار ثانی است پس

$$۳(x+۷)=۴۳+x$$

و بنابر خواص عباراتیکه در داخل پرانتز قرار میگیرند داریم $۳x+۲۱=۴۳+x$ لیکن میدانیم که اگر از دو مقدار متساوی یک مقدار معین را کم کنیم باقیمانده های حاصل نیز دو مقدار متساوی خواهند بود پس اگر از دو طرف تساوی فوق یکبار ۲۱ و یکبار x را کم کنیم باقی میماند

$$x=۲۲ \quad \text{یا} \quad x=۱۱$$

باین چند نکته توجه کنید - اولاً در حل جبری مسئله هیچگونه عمل فکری و نکته ای که قابل تأمل باشد وجود ندارد تنها کاری که کردیم آن بود که بیان صورت مسئله را بوسیلهٔ حروف و علامات یا بزبان ریاضی نوشتیم و مقدار مجهول از آنجا حاصل شد و حال آنکه در حل حسابی حتماً باید فکر و منطق را دخالت داد و کلید حل مسئله را که در بسیاری موارد نکته ای باریک و مشکل است پیدا کرد

ثانیاً همین مسئله را میتوانیم بطریق زیر عمومیت بدهیم

سن پدری a سال است و سن پسرش b سال معین کنید

پس از چند سال سن پدر ۳ برابر سن پسر میشود

برای حل مسئله اگر عدهٔ سالهای مطلوب را x فرض کنیم مثل حالت قبل معلوم میشود که پس از اینمدت سن پدر $x+a$ سال و سن پسر $x+b$ سال است و مقدار اول ۳ برابر مقدار ثانی میباشد بنابراین داریم :

$$3(x+b) = x+a$$

و یا $3x+3b = x+a$ حال اگر از دو مقدار متساوی $3x+3b$ و $x+a$ یکمرتبه x و دفعهٔ دیگر b را تفریق نمائیم بترتیب حاصل میشود:

$$2x+3b = a \qquad 2x = a-3b$$

و بالاخره

$$x = \frac{a-3b}{2}$$

در اینجا برای تعیین x یک دستور بدست میآید که بکمک آن میتوان بسیاری از مسائل از قبیل مسئله فوق را حل کرد مثلاً هرگاه $a = 43$ (سن پدر) و $b = 7$ (سن پسر) باشد باید جواب مسئله قبل بدست آید و ملاحظه میکنیم که از دستور فوق حاصل میشود :

$$x = \frac{43-21}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

در همین دستور اگر بجای a عدد ۴۰ و بجای b عدد ۱۰ را قرار دهیم

خواهیم داشت :

$$x = \frac{a-3b}{2} = \frac{40-3\times 10}{2} = \frac{40-30}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

یعنی بدون هیچ عمل جدید جواب مسئله زیر را بدست آوردیم :

سن پدری ۴۰ سال و سن پسرش ۱۰ سال است پس از چه مدت سن پدر سه برابر سن پسر میشود و بنابر نتیجه فوق جواب مسئله عبارتست از ۵ سال

از اینجا معلوم میشود که استعمال حروف بجای اعداد علاوه بر سهولتی که در حل مسئله ایجاد میکند حل مسئله را عمومیت میدهد بطوریکه با یک دستور جبری که همان رابطهٔ مابین معلومها و مجهولهای مسئله است میتوان تمام مسائلی را که مطلوب آنها یکی و اعداد آنها مختلف است حل نمود

ثالثاً - از دستور حاصل میتوان دستورهای تشابهی برای حل یک سلسله مسائل دیگر بدست آورد :

فرض کنیم میخواهیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم : سن پسری b سال است و پس از x سال سن پدرش سه برابر سن او میشود سن کنونی پدر چقدر است :

هرگاه سن فعلی پدر را a فرض کنیم از دستور $a = 2x+3b$

که در بالا بدست آوردیم سن پدر بدست میآید و بخصوص اگر $b = ۷$ و $x = ۱۱$ باشد
حاصل میشود $a = ۲ \times ۱۱ + ۳ \times ۷ = ۲۲ + ۲۱ = ۴۳$

و ملاحظه میشود که برای این مسئله حتی حل جبری جدید نیز لازم نیست و همان رابطهٔ مسئله قبل دستور حل این مسئله را نیز بدست میدهد و اگر در این دستور بجای دو مقدار از سه مقدار a و b و x اعداد معین قرار دهیم اندازهٔ مقدار سومی بدست میآید و باین طریق بینهایت مسئله بوسیله یک دستور حل میشود

۶ - در مثال فوق یکی از موارد استعمال جبر را در حل مسائل حساب دیدیم اکنون متذکر میشویم که مورد استعمال جبر فقط در حل مسائل حساب نیست و همچنانکه در شمارهٔ ۱۲) نیز متذکر شدیم غالب قضایای هندسی را میتوان بوسیلهٔ دستورهای جبری بیان کرد و چه بسا ممکن است از روی این دستورها همچنانکه در بالا برای حل مسائل حساب گفتیم دستورهای دیگری تعیین کرد یعنی از روی بعضی قضایای هندسی قضایای دیگری بدست آورد .

همچنین در سایر علوم از قبیل فیزیک و شیمی وغیره میتوان بکمک جبر آثار فیزیکی را بصورت دستورهای ریاضی بیان نموده محاسبهٔ ریاضی را در علومی که با جهان خارجی ارتباط دارند دخالت داد

مثال ۱ - در هندسه سال اول ثابت کردیم که مجموع زوایای داخلی هر چند ضلعی مساوی است با دو برابر عدهٔ ضلع ها منهای چهار قائمه هرگاه مجموع زوایای مزبور را با حرف P و عدهٔ اضلاع را با حرف n نمایش دهیم بیان قضیه فوق در دستور جبری زیر خلاصه میشود $P = ۲n - ۴$ قائمه

و چون در این دستور بجای n اعداد مختلف قرار دهیم مجموع زوایای چند ضلعی های مختلف بدست میآید

بازاء $n = ۴$ $P = ۲ \times ۴ - ۴ = ۸ - ۴ = ۴$

یعنی مجموع زوایای داخلی یک چهار ضلعی ۴ قائمه است

و اگر $n = ۱۱$ باشد داریم $P = ۲ \times ۱۱ - ۴ = ۱۸$ یعنی مجموع زوایای داخلی ۱۱ ضلعی ۱۸ قائمه است . بعکس از روی این دستور میتوان با معلوم بودن مجموع زوایای یک چند ضلعی عدهٔ اضلاع آنرا بدست آورد :

فرض کنیم در دستور $P = ۲n - ۴$ مقدار P مساوی ۳۰ قائمه باشد در اینصورت داریم : $۳۰ = ۲n - ۴$ و چون از خارج میدانیم که $۳۴ - ۴ = ۳۰$ است پس $۲n = ۳۴$ و یا $n = \frac{۳۴}{۲} = ۱۷$

یعنی اگر مجموع زوایای یک چند ضلعی ۳۴ قائمه باشد آن چند ضلعی دارای

۱۷ ضلع میباشد

مثال ۲ - در فیزیک ثابت می‌کنند که هرگاه گازی را حرارت بدهیم بر حجم آن افزوده میشود و اگر حجم گاز را در حرارت صفر درجه v و درجه حرارتی را که بگاز داده ایم t و حجم جدید آن را پس از گرم شدن V فرض کنیم رابطه زیر برقرار است $V = v\left(1+\frac{t}{273}\right)$ و در این دستور اگر اندازه دو مقدار از سه مقدار V و v و t را بدانیم اندازه سومی بدست میآید و متذکر میشویم که از روی این دستور بسیاری دستورهای دیگر فیزیکی را نتیجه میگیرند خلاصه آنکه موارد استعمال جبر بسیار است و هر قدر مقدمات بیشتر بیاموزیم موضوع روشنتر خواهد گشت .

شرح بعضی اعمال مقدماتی درباره حروف - مقدار عددی یک عبارت

۷ - در شماره (۲) گفتیم که برای ضرب دو عدد که بوسیله دو حرف نمایش داده شده باشند آنها را بتوالی یکدیگر مینویسیم

اکنون متذکر میشویم که در مورد ضرب چندین عدد نیز عین همین کار را میکنند یعنی اعداد مزبور را عموماً بتوالی یکدیگر مینویسند :

$$a \times b \times c \times d = abcd$$

هر یک از این اعداد را یک عامل ضرب یا یک فاکتور مینامند

هرگاه بعضی از عوامل ضرب عدد و بعضی دیگر حروف باشند اعداد را در هم ضرب کرده و سمت چپ سایر عوامل مینویسند و آنرا ضریب حاصلضرب مینامند و سایر عوامل را سمت راست ضریب مزبور بتوالی یکدیگر مینویسند

$$3 \times a \times b \times 5 \times 4 \times c = 60\,abc$$

در حالتی که ضریب یک باشد معمولاً آن را حذف مینمایند $1 \times a = a$

باید دانست که کلمه ضریب مفهوم کلی‌تری دارد که در موقع خود بیان میشود

۸ - هرگاه یک عدد را چندین بار متوالیاً در خود آن ضرب نمائیم حاصلضرب را قوه‌ای از آن عدد مینامند و برای نوشتن قوه عدد مزبور را نوشته و تعداد عوامل ضرب را در بالای آنعدد و کمی بسمت راست مینویسند

$a \times a$ قوه دوم عدد a است و بصورت a^2 نوشته میشود

$a \times a \times a$ قوه سوم عدد a است و بصورت a^3 نوشته میشود

و همچنین است برای سایر قوای عدد

در اینحال عدد a را پایه قوه و اعداد ۲ و ۳ و ..... را که تعداد عوامل ضرب شده را نشان میدهند نمای قوه مینامند مثلاً اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ بترتیب

نای a^2 و a^3 و a^5 و a^7 هستند ـ

گاهی a^2 را مجذور و a^3 را مکعب عدد a نیز مینامند .

وقتی قوه عددی ۱ باشد آنرا حذف مینمایند پس $a = a^1$ بعبارت دیگر مثلاً a و $1a$ و a^1 و $1a^1$ همه یک معنی دارند

۹ـ تبصره ـ باید متوجه بود که ضریب و نمای یک عدد با هم فرق دارند و نباید آنها را با هم اشتباه کرد مثلاً $3a$ و a^3 با هم فرق دارند اولی حاصلضرب عدد ۳ در عدد a و دومی حاصلضرب اعداد a و a و a میباشد پس اگر $a = 4$ باشد داریم :

$$3a = 3\times a = 3\times 4 = 12$$
$$a^3 = a\times a\times a = 4\times 4\times 4 = 64$$

و نیز $4b^2$ با $2b^4$ متفاوت است و مثلاً اگر $b = 5$ باشد داریم :

$$4b^2 = 4\times b\times b = 4\times 5\times 5 = 100$$

ولی $2b^4 = 2\times b\times b\times b\times b = 2\times 5\times 5\times 5\times 5 = 1250$

و مخصوصاً باید در نظر داشت که تمام قوای عدد ۱ برابر با یک است

۱۰ ـ در حساب دیده ایم که در حاصلضرب چند عامل ترتیب قرار گرفتن

عاملها دخالت ندارد مثلاً

$$3\times 4\times 5 = 5\times 3\times 4 = 4\times 5\times 3$$

بهمین ترتیب در جبر نیز حاصلضرب دو عدد a و b را میتوان بهریک از دو صورت ab یا ba نوشت و نیز مقادیر :

abc و acb و bac و bca و cab و cba همه یک معنی دارند و حاصلضرب سه عدد a و b و c را نشان میدهند

۱۱ـ تبصره ـ اگر بعضی از عوامل ضرب عدد کسری باشند بهتر است آنها را بصورت کسر متعارفی بنویسیم $1,3\times a\times x\times z = \frac{13}{10}axz$

بازاء $a=6$ و $x=7$ و $z=5$ مقدار عبارت فوق مساویست با

$$\frac{13}{10}axz = \frac{13}{10}\times 6\times 7\times 5 = 273$$

۱۲ ـ وقتی که عوامل ضرب مختلف باشند و هریک از آنها چند بار تکرار شده باشد حاصلضرب را با طریقه‌ای مشابه با آنچه در شماره (۸) گفته شد بصورت قوه مینویسیم مثلاً

$$aabbbbcddd = a^2b^4cd^3$$

برعکس عدد $7a^3cd^2$ با عدد $7\times a\times a\times a\times c\times d\times d$ یک معنی دارند .

مثال ۱- اگر $x=۵$ و $y=۳$ باشد میخواهیم مقدار عددی $۴x^{۲}y^{۳}$ را حساب کنیم:

$$۴x^{۲}y^{۳} = ۴\times ۵^{۲}\times ۳^{۳} = ۴\times ۲۵\times ۲۷ = ۲۷۰۰$$

مثال ۲- بازار $a=۴$ و $b=۹$ و $x=۶$ میخواهیم مقدار عددی $\frac{۸bx^{۲}}{۲۷a^{۳}}$ را حساب کنیم

$$\frac{۸bx^{۲}}{۲۷a^{۳}} = \frac{۸\times ۹\times ۶^{۲}}{۲۷\times ۴^{۳}} = \frac{۸\times ۹\times ۳۶}{۲۷\times ۶۴} = \frac{۳}{۲} = ۱\frac{۱}{۲}$$

۱۳- هرگاه یکی از عوامل ضرب مساوی صفر باشد مقدار عددی حاصلضرب صفر خواهد بود اگرچه تمام عوامل دیگر ضرب صفر نباشند مثلاً در حاصل ضرب $abx^{۳}y^{۲}$ اگر $x=۰$ باشد مقدار حاصل ضرب صفر است هرچه باشد مقدار a و b و y و همچنین در حاصلضرب $ab^{۲}c^{۳}$ اگر $c=۰$ باشد $c^{۳}=۰$ است لذا $ab^{۲}c^{۳}=۰$ میباشد بخصوص:

تمام قوای عدد صفر مساوی با صفر هستند

۱۴- جملهٔ جبری و عبارت جبری - مجموعه‌ای از چند عدد که تمام یا بعضی از آنها بوسیلهٔ حروف نمایش داده شوند و اعمالی که باید دربارهٔ این اعداد انجام داد و بوسیلهٔ علامات جبری مشخص باشند یک عبارت جبری پدید میآورد مانند عبارات

$$abc + ۵a$$

و عبارت $۷a + ۵b - ۳c - x + ۲y$

هر عبارتی که مابین حروف و اعداد آن عمل جمع و تفریق وجود نداشته باشد یک جملهٔ جبری یا عبارت یکجمله‌ای نامیده میشود مانند:

abc و $۷a$ و $x^{۲}yz^{۴}$ و $\frac{x^{۲}}{y}$ وغیره پس عبارت $abc+۵a$ شامل دو جمله و عبارت $۷a+۵b-۳c-x+۲y$ شامل پنج جمله است.

وقتی در یک عبارت جبری بر جملهٔ اول علامتی مقدم نباشد دلیل است بر اینکه علامت + بر آن مقدم است و با این قرارداد معلوم میشود که تعداد جمله‌های هر عبارت مساوی است با عدهٔ علامتهای + یا - که در آن عبارت وجود دارد.

۱۵- ریشهٔ یک عدد یا یک عبارت - جذر یا ریشهٔ دوم هر عدد یا هر عبارت اختیاری عدد یا عبارت دیگری است که چون آنرا مجذور کنیم (بقوهٔ دو برسانیم) عدد یا عبارت اولی حاصل شود مثلاً جذر عدد ۸۱ عدد ۹ است زیرا داریم $۹^{۲}=۸۱$

جذر عدد a را بصورت $\sqrt[۲]{a}$ یا بطور اختصار بصورت $\sqrt{a}$ مینویسند

بهمین ترتیب ریشهٔ سوم و چهارم و پنجم و ..... هر عدد یا هر عبارت اختیاری عدد یا عبارت دیگری است که چون آن را بقوهٔ سوم یا چهارم یا پنجم یا.... برسانیم عدد یا عبارت اولی بدست آید . این ریشه ها را با علامات $\sqrt[۳]{\ }$ و $\sqrt[۴]{\ }$ و $\sqrt[۵]{\ }$ و .... نمایش میدهند و علامت $\sqrt{\ }$ را رادیکال مینامند

مثلاً $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$ زیرا $۳^۳=۲۷$ و $\sqrt[۵]{۳۲}=۲$ زیرا $۲^۵=۳۲$ و ... ...

مثال ۱ - میخواهیم مقدار عددی عبارت $۵\sqrt{۶a^۳b^۴c}$ را بازاء $a=۳$ و $b=۱$ و $c=۸$ حساب کنیم :

$$۵\sqrt{۶a^۳b^۴c}=۵\times\sqrt{۶\times۳^۳\times۱^۴\times۸}=۵\sqrt{۶\times۲۷\times۸}$$
$$=۵\times\sqrt{۱۲۹۶}=۵\times۳۶=۱۸۰$$

مثال ۲ - مطلوب است محاسبهٔ مقدار عددی عبارت $\sqrt[۳]{\frac{ab^۴}{۸x^۳}}$ بازاء $a=۹$ و $b=۳$ و $x=۵$:

$$\sqrt[۳]{\frac{ab^۴}{۸x^۳}}=\sqrt[۳]{\frac{۹\times۳^۴}{۸\times۵^۳}}=\sqrt[۳]{\frac{۹\times۸۱}{۸\times۱۲۵}}=\sqrt[۳]{\frac{۹\times۹\times۹}{۱۰۰۰}}=\frac{۹}{۱۰}$$

۱۶ - مقدار عددی یک عبارت جبری - وقتی که بخواهیم مقدار عددی یک عبارت جبری را که شامل چند جمله است بازاء مقادیر عددی معینی که بحروف نسبت داده شده حساب کنیم میتوان مقدار عددی هر جمله را علیحده معین کرد آنوقت عبارت

جبری حکم یک سلسله جمع و تفریق های متوالی را پیدا میکند که قاعدهٔ انجام دادن آنها را در حساب دیده ایم

مثال ۱ - میخواهیم بازاء $c=۵$ مقدار عددی عبارت : $c^۴-۴c+۲c^۳-۳c^۲$ را حساب کنیم

$$c^۴=۵^۴=۵\times۵\times۵\times۵=۶۲۵$$
$$۴c=۴\times۵=۲۰$$
$$۲c^۳=۲\times۵^۳=۲\times۵\times۵\times۵=۲۵۰$$
$$۳c^۲=۳\times۵^۲=۳\times۵\times۵=۷۵$$

پس $c^۴-۴c+۲c^۳-۳c^۲=۶۲۵-۲۰+۲۵۰-۷۵=۷۸۰$

درحالتیکه پرانتز یا کروشه در عبارت جبری موجود باشد طریقهٔ عمل همان است که در مورد پرانتز موجود در عبارات عددی گفتیم یعنی مقادیر واقع در داخل پرانتز در حکم مقدار واحدی محسوب میگردند که در مقدرات شریک هستند

مثال ۲ - مطلوب است محاسبهٔ مقدار عددی عبارت $a(b+c)^۲-c(a-b)^۳$ بازاء $a=۷$ و $b=۳$ و $c=۲$.

$$a(b+c)^۲-c(a-b)^۳=۷(۳+۲)^۲-۲(۷-۳)^۳=$$

$= 175 - 128 = 47$

مثال ۳- مطلوب است محاسبهٔ مقدار عددی عبارت

$$a^2 \times \frac{a-b}{b+2c} - b^2 \times \frac{a-c}{(a+c)^2}$$

بازاء $a=5$ و $b=3$ و $c=1$:

$$a^2 \times \frac{a-b}{b+2c} - b^2 \frac{a-c}{(a+c)^2} = 5^2 \times \frac{5-3}{3+2\times 1}$$

$$-3^2 \times \frac{5-1}{(5+1)^2} = 25 \times \frac{2}{5} - 9 \times \frac{4}{36} = 10 - 1 = 9$$

مسائل و تمرینات فصل اول

مفهوم هر یک از قضایای زیر را بوسیلهٔ دستورهای جبری بنویسید :

۱- در هر مرابحه مبلغ سود برابر است با یکصدم حاصلضرب سرمایه در زمان (بر حسب سال) و در نرخ مرابحه

۲- در هر تقسیم مقسوم مساوی است با حاصلضرب خارج قسمت در مقسومٌ علیه باضافهٔ باقیمانده

۳- چگونه از دستور تعیین سود در مرابحه (تمرین ۱) میتوان دستور تعیین نرخ و زمان و سرمایه را بدست آورد .

۴- در هر مثلث هر ضلع بزرگتر است از تفاضل دو ضلع دیگر .

۵- در هر مثلث هر ضلع کوچکتر است از مجموع دو ضلع دیگر .

۶- در هر مثلث مجموع زوایا 180° است .

۷- مساحت ذوزنقه مساوی است با مجموع طولهای دو قاعده ضرب در نصف طول ارتفاع

۸- مساحت متوازی الاضلاع مساوی است با حاصلضرب طول قاعده در طول ارتفاع .

۹- مساحت سطح جانبی هر اطاق مساوی است با دو برابر ارتفاع آن در مجموع دو ضلع کف اطاق .

۱۰- وزن مخصوص هر جسم مساوی است با وزن آن بر حسب کیلوگرام تقسیم بر حجم آن بر حسب لیتر

۱۱- حجم هر هرم مساوی است با حاصلضرب طول ارتفاع آن در $\frac{1}{3}$ مساحت سطح قاعدهٔ آن

۱۲- حجم کره مساوی است با $\frac{4}{3}$ عدد π در مکعب طول شعاع

۱۳- مساحت دایره مساوی است با مجذور طول شعاع در عدد π

۱۴- مساحت سطح کره مساوی است با چهار برابر مساحت دایره ای که شعاع آن مساوی شعاع کره باشد .

۱۵- نسبت مساحت دو مربع مساوی است با نسبت مجذور ضلع های آنها

۱۶- نسبت مساحت دو مستطیل مساوی است با نسبت حاصلضرب طول ضلع های آنها

مسائل زیر را با حساب و با جبر حل کرده نتایج حاصل را با یکدیگر مقایسه کنید

۱۷- عددی را ۵ برابر کرده ۷ واحد بر حاصلضرب افزوده ایم نتیجه ۲۲ شده است آن عدد چقدر است

۱۸- عددی را بر ۳ تقسیم کرده از خارج قسمت ۷ واحد کم کرده ایم حاصل ۴ شده است آن عدد چقدر است

۱۹- ۶۰ عدد شیرینی را بتساوی بین چند طفل قسمت کرده ایم یکی از آنها بعد از خوردن ۸ عدد شیرینی هفت عدد دیگر داشت عدهٔ اطفال چقدر است .

۲۰ - عددی را یکبار چهار برابر و یکدفعه ۷ برابر می‌کنیم و بر مجموع دو مقدار حاصل ۱۶ واحد میافزائیم و حاصل مساوی ۶۰ میشود آنعدد چقدر است

۲۱ - سن پدری سه برابر سن پسر او است و مجموع سنین آنها ۶۰ سال است سن هر یک چقدر است

۲۲ - عددی است که اگر آن را بر ۳ تقسیم کنیم با قیمانده ۲ میشود و اگر آنرا بر ۶ تقسیم نمائیم نیز باقیمانده ۲ میشود مطلوب است تعیین آنعدد هرگاه مجموع خارج قسمتها ۹ باشد

۲۳ - ۱۰۰ ریال را بین سه نفر قسمت کرده ایم بطوریکه سهم اولی ده ریال از سهم دومی و سهم دومی ۱۵ ریال از سهم سومی بیشتر است سهم هر یک چقدر است .

۲۴ - دو برادر هر یک ۱۰۰۰ ریال پول دارند اولی هر ماه صد ریال بر ذخیرهٔ خود میافزاید و دومی هر ماه ۵۰ ریال از ذخیرهٔ خود را خرج مینماید پس از چند ماه ذخیرهٔ اولی ۴ برابر ذخیرهٔ دومی میشود .

مقدار عددی عبارات زیر را بازاء $a=7$ و $b=2$ و $c=1.0$ و $x=5$ و $y=3$ معین کنید

۲۵ - $14x$

۲۶ - x^3

۲۷ - a^3

۲۸ - b^5

۲۹ - $2xa$

۳۰ - $6c^4$

۳۱ - $4y^3$

۳۲ - $7c^5$

۳۳ - $9b^4$

۳۴ - $8bcy$

۳۵ - $7y^2$

مقدار عددی عبارات زیر را بازاء $a=7$ و $b=2$ و $c=0$ و $x=5$ و $y=3$ حساب کنید

۳۶ - $4ax^2$

۳۷ - a^3b

۳۸ - $8b^2y$

۳۹ - $3xy^2$

۴۰ - $\frac{3}{4}b^2x$

۴۱ - $\frac{5}{6}b^3y^2$

۴۲ - $\frac{2}{5}xy^4$

۴۳ - a^3c

۴۴ - a^2cy

۴۵ - $8x^3y$

۴۶ - $\frac{7}{20}ab^3x$

۴۷ - $\frac{1}{4}x^2y^4$

مقدار عددی عبارات زیر را بازاء $a=2$ و $b=3$ و $c=1$ و $p=5$ و $q=4$ و $r=6$ حساب کنید

۴۸ - $\frac{3a^2r}{8b}$

۴۹ - $\frac{6a^2c}{b^2}$

۵۰ - $\frac{4cr^2}{9a^3}$

۵۱ - $3a^2b^c$

۵۲ - $\frac{5}{6}ba^r$

۵۳ - $5a^bc^r$

مقدار عددی عبارات زیر را بازاء $a=8$ و $K=9$ و $x=4$ و $y=1$ حساب کنید

۵۴ - $\sqrt{2ax}$

۵۵ - $\sqrt[3]{ax^2}$

۵۶ - $2xy\sqrt{4y^5}$

۵۷ - $\sqrt{\frac{16x}{49y^3}}$

۵۸ - $\sqrt[3]{\frac{ax^3}{27y^3}}$

مقدار عددی عبارات زیر را بازاء $a=2$ و $b=1$ و $c=3$ و $x=4$ و $y=6$ و $z=0$ حساب کنید

۵۹ - $a^2+b^2+c^2$ ۶۳ - $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2y}{x^2}$

۶۰ - $ab+bc+ca.$ ۶۴ - $\frac{a^2}{b^2}c^2+\frac{a^2}{b^2}+c^2$

۶۱ - $c^2(y-x)-b^2(c-a)$ ۶۵ - $\frac{(a+b)^2}{(y-c)^2}-\frac{a(y-z)}{c(x+z)}$

۶۲ - $(x+2y-z)(2a-c)$ ۶۶ - $\frac{(a+b+c)^2}{c(y-z)}-\frac{4(c-a)^3}{3(a+y)}$

۶۷ - ثابت کنید که عبارت $y^2-15y+56$ هم بازاء $y=7$ وهم بازاء $y=8$ صفر میشود

۶۸ - ثابت کنید که عبارت $x^3-6x^2+11x-6$ بازاء ۳ و ۲ و $x=1$ صفر میشود

۶۹ - هر عددی بجای x و y بگذارید دو عبارت زیر باهم مساوی میشوند :

$(x+y)(3x-y)(2x+y)$ و $6x^3+7x^2y-y^3$

فصل دوّم - استعمال اعداد منفی در جبر

۱۷ - در مثالهای فصل اول همواره مجموع اعدادی که باهم جمع میشدند از مجموع اعدادی که از آنها تفریق میگشتند بزرگتر بود بعبارت دیگر تمام اعمال مطلوب از نظر حساب قابل اجرا بوده اند

حال اگر در مثالی بخواهیم یک عمل تفریق مانند ۹ - ۴ انجام دهیم گوئیم تفریق مزبور از نظر حساب قابل اجرا نمی باشد لیکن با قرار دادهائی که در جبر میشود عمل تفریق فوق و اعمال مشابه آنرا نیز میتوان انجام داد و اساس این قرار دادها عبارتست از استعمال اعداد منفی در جبر :

مثالهای زیر چگونگی این موضوع را روشن میسازند :

۱۸ - چگونگی کمیّاتی که در دو جهت تغییر مینمایند - مثال ۱ - مادری عادت دارد که هر هفته وزن طفل خود را معیّن نماید . برای تعیین تغییرات وزن طفل اگر فقط بگوئیم وزن وی از یک هفته تا هفتهٔ بعد ۱۲۰ گرم تغییر یافته است چگونگی تغییر وزن معلوم نمیشود زیرا ممکن است ۱۲۰ گرم بر وزن طفل افزوده شده باشد یا از آن کم شده باشد بعبارت دیگر اگر در یک هفته وزن طفل ۴۷۶۰ گرم

بوده است ممکن است در هفتهٔ بعد ۴۸۸۰ = ۱۲۰ + ۴۷۶۰

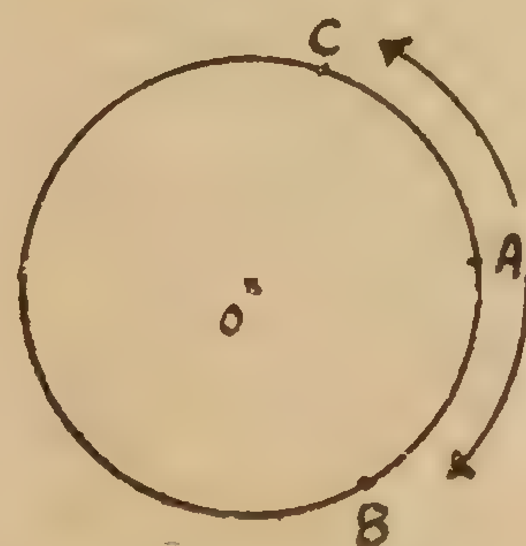
ویا ۴۶۴۰ = ۱۲۰ - ۴۷۶۰ شده باشد

پس وزن کمیتی است که اندازه گیری تغییرات آن در دوجهت مختلف ممکن میباشد

مثال ۲ - دو ترن A و B در دو وقت مختلف بایستگاهی وارد میشوند، هرگاه بگوئیم فاصله مابین رسیدن دو ترن بایستگاه یکساعت بوده است . معلوم نخواهد شد که کدام یک از آنها زودتر بایستگاه رسیده اند بلکه باید مشخص کرد که مثلاً ترن A یکساعت زودتر از ترن B رسیده است یا ترن B یکساعت بعد از ترن A بایستگاه رسیده

پس زمان مابین انجام دو عمل متوالی کمیتی است که اندازه گیری آن در دوجهت ممکن است بعبارت دیگر فاصلهٔ مابین زمانهائی که دو عمل معین انجام شده است ممکن است ممتد بطرف گذشته یا بسمت آینده باشد .

مثال ۳ - متحرکی روی دایرهٔ O از نقطهٔ A شروع بحرکت میکند



واضحست که متحرک مزبور روی دایره در دو جهت مختلف میتواند حرکت کند (جهاتی که بوسیلهٔ سهم نشان داده شده اند) بنابراین هرگاه فاصلهٔ قوسی متحرک

از A داده شود (یا زاویهٔ $\widehat{AOB}$ را برحسب واحد معینی بدهند) وضع متحرک مشخص نمیشود زیرا میتوان ابتدا از نقطهٔ A طول یا زاویه مزبور را در دو جهت مختلف جدا کرد و بنابراین کمانهای دایره کمیاتی هستند که ممکن است در دو جهت مختلف اندازه گرفته شوند

مثال ۴ - صندوقدار بانکی در هر روز چندین معامله با مشتریهای بانک انجام میدهد . برای تعیین چگونگی این معاملات کافی نیست که فقط مبلغ آنها را بیان کنیم زیرا ذکر مبلغ بیان نمیکند که معاملهٔ مزبور پرداخت بوده است یا دریافت بنابراین وجوه موجود در صندوق کمیتی است که تغییر آن در دوجهت مختلف ممکن است

۱۹ - اعداد جبری - از مثالهای فوق معلوم میشود که با تعیین اندازهٔ عددی بسیاری از کمیات مقدار آن کمیت واضح نمیشود بعبارت دیگر برای نمایش این قبیل کمیات تعیین مقادیر عددی آنها کافی نیست بلکه در مورد چنین کمیاتی باید دو سلسله اعداد در نظر گرفت که هر سلسله از آنها مربوط بیکی از دو جهت تغییرات کمیت مزبور باشد . طریقهٔ تشخیص این دو نوع کمیت اختیاری است و باید علاماتی وضع کرد که دو نوع مختلف از یک کمیت را از هم متمایز ساخت مثلاً ممکن است چنین قرار داد کنیم که در محاسبهٔ وجوه موجود در صندوق بانک زیر اعدادی که

مبالغ پرداخت شده را نشان میدهند خط بکشیم و اعدادی که وجوه دریافت
شده را نشان میدهند بدون خط بنویسیم یا مثلاً در محاسبهٔ وزن طفل در مثال ۱
اگر تغییرات وزن را با خط قرمز نوشتیم نشانهٔ افزایش وزن باشد و اگر آنرا با
خط سیاه نوشتیم نشانهٔ کاهش وزن محسوب شود .

لیکن چنانکه خواهیم دید در بسیاری از موارد ممکن است مجبور شویم که کمیاتی از انواع
فوق را که در دو جهت مختلف تغییر مینمایند با هم جمع کرده یا از یکدیگر تفریق نمائیم
بنابراین برای آنکه جمع و تفریق دو سلسله اعدادیکه اندازهٔ یک کمیت را در دو جهت
مختلف نشان میدهند ممکن باشد بهتر است که خود این نوع کمیات را نیز بوسیلهٔ
علامات + یا - که نشانهٔ افزایش یا کاهش مقدار یک کمیت اند مشخص سازیم

۴۳۰۰ + ریال دریافت مبلغ ۴۳۰۰ ریال را میرساند یعنی این مبلغ بر
صندوق بانک افزوده شده است .

۴۳۰۰ - ریال پرداخت مبلغ ۴۳۰۰ ریال را میرساند یعنی این مبلغ از صندوق
بانک برداشته شده است .

۱۲۰ + گرم نشان آنست که ۱۲۰ گرم بر وزن طفل افزوده شده .

۱۲۰ - گرم کاهش وزن طفل را بمیزان ۱۲۰ گرم نشان میدهد .

در این حالات مقدار برداشت یا دریافت هر دو مساوی ۴۳۰۰ ریال هستند
ولی علامات + یا - بترتیب نشانهٔ آن است که این مبلغ بر صندوق بانک
اضافه شده یا از آن کاسته گردیده است و در مورد دوم علامات + یا -
بجای کلمات افزایش وزن طفل یا کاهش وزن طفل بکار برده شده است
با این قرارداد مثلاً حسابدار بانک یا یک شرکت تجارتی میتواند مبالغ دریافت
یا پرداخت یا سود و زیان شرکت را در دفتر تجارتی در یک ستون منظور نماید با این
تفاوت که مبالغ دریافت (یا سود) را با علامت + و پرداخت (یا زیان
یا مبلغ قرض) را با علامت - نمایش دهد و این عمل در مورد تمام کمیاتی که در دو
جهت تغییر مینمایند قابل اجرا میباشد :

اعدادی را که با علامات + یا - مقدم هستند اعداد جبری مینامند :

۲۵ متر +   ۱۸- درجه   ۳/۵ -   ۰/۸۲ +

۲۰ - چند مثال دیگر - در فیزیک معمول است درجهٔ حرارتی را که در آن یخ شروع
بآب شدن مینماید مبدء سنجش حرارت اختیار میکنند پس حرارتهای بیشتر
از آن را با علامت + و حرارتهای کمتر از این مقدار را با علامت - نمایش
میدهند پس ۱۸- یعنی ۱۸ درجه کمتر از درجهٔ حرارت یخی که در حال آب شدن

است و °۷۰+ یعنی ۷۰ درجه بیشتر از مقدار فوق پس مثلاً میتوانیم بگوئیم که: جیوه در °۳۹- متجمد میشود و در °۳۵۷+ بجوش میآید

برای سنجش ارتفاع نقاط مختلف کرهٔ زمین سطح آب دریاهای آزاد (اقیانوسها) را مبدء ارتفاع میگیرند، ارتفاع نقاطی را که از دریا بلندترند بعلامت + و ارتفاع نقاطی را که از سطح دریا پائین تر میباشند بعلامت - نمایش میدهند پس میتوان گفت ارتفاع قلهٔ توچال ۴۰۰۰+ متر و ارتفاع سطح بحر خزر ۲۶- متر است یعنی سطح آن ۲۶ متر از سطح دریاهای آزاد پائین تر میباشد

۲۱ - اعداد جبری مثبت و اعداد جبری منفی - هر عدد حسابی را که بر آن علامت + مقدم باشد عدد جبری مثبت و هر عدد حسابی را که علامت - مقدم بر آن باشد عدد جبری منفی مینامند.

هر عدد حسابی را که برای نوشتن یک عدد جبری بکار میرود قدر مطلق آن عدد جبری مینامند و برای نمایش قدر مطلق یک عدد جبری آن عدد جبری را مابین دو خط قائم متوازی مینویسند :

۳+ عدد جبری مثبتی است و قدر مطلق آن |۳+| یا ۳ است

۷/۴- عدد جبری منفی است و قدر مطلق آن |۷/۴-| یا ۷/۴ است.

۲۲ - عدد صفر - دو دسته اعداد جبری مثبت و اعداد جبری منفی بوسیلهٔ عدد صفر از یکدیگر مجزا میشوند که دارای علامت نمی باشد و گذاردن علامت بر آن تأثیری در مقدار آن ندارد پس میگویند یخ در °۰ شروع بآب شدن میکند و نمیگویند در °۰+ یا °۰-

۲۳ - تبصره - باید در نظر داشت که علامات + یا - که برای نوشتن اعداد جبری بکار میروند باید با مقدار مطلق رویهمرفته بمنزلهٔ یک حرف در نظر گرفته شوند بطوریکه قابل تفکیک از یکدیگر نمیباشند و غالب اوقات برای نشان دادن این موضوع عدد جبری را در داخل یک پرانتز مینویسند :

(۳+) و (۷-) و (۲/۴+) و (۰/۸-)

و منظور آنست که علامات + یا - انجام یک عمل جمع یا تفریق را نمایش نمیدهند بلکه مشخص عدد جبری هستند.

۲۴ - نمایش اعداد جبری بوسیلهٔ حروف - همچنانکه در فصل اول گفتیم میتوان اعداد جبری را نیز مانند اعداد حسابی بوسیلهٔ حروف نمایش داد مثلاً

$a = (+۳)$ یا $b = (-۲/۵)$

هرگاه e و f درجهٔ حرارت جوشش و ذوب جیوه باشند میتوان نوشت:

$e = (+۳۵۷)$ و $f = (-۳۹)$. مقدار مطلق عدد جبری a را با علامت

$|a|$ نمایش میدهند

۲۵- **تعریف** - دو عدد جبری را متساوی گویند وقتیکه مقدار مطلق آنها متساوی بوده علامت آنها نیز یکی باشد پس مثلاً داریم :

$$(+۳٫۵) = (+\frac{۷}{۲}) \quad و \quad (-\frac{۱۲}{۴}) = (-۳)$$

دو عدد جبری را قرینه یا متقابل گویند وقتی که مقدار مطلق آنها یکی بوده علامت آنها مختلف باشد مانند (۳+) که با (۳-) قرینه است و (۲٫۷-) که با (۲٫۷+) متقابل میباشد

دو عدد جبری را عکس یکدیگر گویند هرگاه علامت آنها یکی بوده مقدار مطلق آنها عکس یکدیگر باشند مانند $+\frac{۲}{۵}$ که با $+\frac{۵}{۲}$ عکس یکدیگرند و $(-\frac{۳}{۷})$ که عکس $(-\frac{۷}{۳})$ است و ۶+ که عکس $(+\frac{۱}{۶})$ میباشد وغیره

۲۶- اعداد مثبت و اعداد حسابی - در عمل وقتی اعداد جبری را برای اندازه گیری کمیات بکار میبرند چون کمیات مزبور قابل تغییر در دو جهت میباشند اعداد مثبت برای اندازه گیری مقادیر واقع در یک جهت و اعداد منفی برای اندازه گیری

مقادیر واقع در جهت دیگر بکار میروند و انتخاب هر یک از دو جهت مزبور اختیاریست ولی عادت براین جاری شده است که اعداد مثبت را برای اندازه گیری معمولی ترین جهت کمیت مزبور یعنی جهتی که قبلاً بوسیلهٔ اعداد حسابی نمایش داده میشد بکار برند .

بنابراین در غالب موارد اعداد حسابی را با اعداد جبری مثبت یکی محسوب میدارند و مثلاً بجای آنکه بگویند درجهٔ حرارت ۲۷+ است میگویند درجهٔ حرارت ۲۷ است وبجای آنکه بگویند ارتفاع مکانی ۱۴۳ + متر است میگویند ارتفاع مکان ۱۴۳ متر است یعنی علامت + را از مقابل اعداد مثبت بر میدارند

از اینجا معلوم میشود که اعمال اصلی راجع باعداد حسابی حالات مخصوصی از قواعد اعمال مزبور دربارهٔ اعداد جبری هستند که هم اکنون آنها را مورد مطالعه قرار میدهیم .

جمع جمله های متشابه

۲۷- جمله های متشابه - جمله های جبری را وقتی متشابه مینامند که یا از هیچ لحاظ با هم اختلاف نداشته باشند و یا اختلاف آنها فقط در مقدار ضریب عددی آنها باشد و در غیر اینصورت جمله ها را غیر متشابه مینامند مثلاً $۳a$ و $۷a$ دو جمله متشابه اند و $۵ab$ با $۲ab$ متشابه است و نیز $۲a^{۳}b^{۲}$ و

$(-4a^3b^2)$ تشابه میباشند لیکن $4a$ با $3b$ غیرمشابه است و $7a^2$ و $9a^2b$ غیرمتشابه هستند

قاعده های زیر برای جمع جمله های متشابه بکار میرود

۲۸ - قاعدهٔ ۱ - مجموع جمله های متشابه جمله ای است مشابه با آنها

۲۹ - قاعدهٔ ۲ - برای جمع جمله های متشابه اگر تمام آنها مثبت باشند کافی است ضرائب آنهارا باهم جمع کنیم

مثال - مطلوبست محاسبهٔ $8a + 5a$

همانطور که ۵ سیب با ۸ سیب میشود ۱۳ سیب و ۸ ریال بعلاوه ۵ ریال میشود ۱۳ ریال

برای a نیز همانطور است یعنی $8a + 5a = 13a$

و نیز $8a + 5a + 3a + 6a = 22a$

۳۰ - قاعدهٔ ۳ - اگر تمام جمله ها منفی باشند مقدار مطلق تمام ضریبهارا باهم جمع کرده و مقابل آن علامت (-) میگذاریم

میخواهیم مجموع $-3x$ و $-5x$ و $-7x$ و $-x$ را بدست اوریم .

فرض کنیم یکدسته اشیاء همجنس داریم ومیخواهیم ابتدا ۳ عدد وسپس ۵ عدد وبعد از آن ۷ عدد و بالاخره یکعدد از آن ها برداریم پس رویهمرفته ۱۶ عدد از آنها برداشته ایم

در مثال فوق نیز مطلب از همین قرار است و علامت - را میتوان نشانهٔ برداشت دانست

پس مجموع $-3x$ و $-5x$ و $-7x$ و $-x$ مساوی با $-16x$ است

۳۱ - قاعدهٔ ۴ - هرگاه در جمع جمله های متشابه همهٔ جمله ها دارای یک علامت نباشند ضرائب تمام جمله های مثبت را باهم وضرائب تمام جمله های منفی را باهم جمع می کنیم و تفاضل دو نتیجهٔ حاصل را بدست آورده علامت نتیجهٔ بزرگتر را بر آن مقدم مینمائیم :

فرض کنیم میخواهیم مجموع $17x$ و $-8x$ را بدست آوریم . همانطور که اگر در معامله ای ۱۷ ریال سود بریم و در معاملهٔ دیگر ۸ ریال زیان نمائیم درمجموع این دو معامله ۹ ریال سود برده ایم مجموع $17x$ و $-8x$ برابر $9x$ است (از جنس سود $17-8=9$)

بهمین ترتیب معلوم میشود که مجموع $-17x$ و $8x$ برابر $-9x$ است (از جنس زیان) حال برای تعیین مجموع a و $-a$ و $-a$ و a و a و a ملاحظه می کنیم که مجموع ضرائب جمله های مثبت ۱۶ است ومجموع قدر مطلق های ضرائب جمله های منفی ۲۱ است تفاوت این دو مقدار ۵ میباشد و علامت آن علامت مقدار بزرگتر یعنی ۲۱ است که منفی میباشد پس مجموع مطلوب $-5a$ است .

واضح است که ترتیب نوشتن اعداد مثبت و منفی مزبور در نتیجه تأثیری ندارد زیرا مثلاً اعداد منفی چه مقدم و چه مؤخر نوشته شوند ضرائب تمام آنها را باهم جمع می کنیم و همچنین است در مورد اعداد مثبت و لذا محل نوشتن آنها در نتیجه تأثیری ندارد یا بمعنی دیگر در یک رشته اعمال سود و زیان نتیجهٔ عمل بستگی بتقدم یا تأخر سود بر زیان و یا بالعکس ندارد

۳۲ - جمع جبری - جمع یک رشته جمله های متشابه را که برخی از آنها دارای علامت + و برخی دیگر دارای علامت - هستند جمع جبری مینامند و مجموع آنها را نیز مجموع جبری گویند و برای نوشتن این عمل جمله های مزبور را با علامت خود بتوالی یکدیگر مینویسند

پس برای نمایش مجموع a ۱۱ و a ۲۷- و a ۱۳ مینویسند

(سود) (زیان) (سود) (زیان)
۱۱ a − ۲۷ a + ۱۳ a = − ۳ a

و ۳- مجموع جبری اعداد مزبور است بهمین ترتیب واضح است که

(سود) (زیان) (زیان) (سود) (زیان) (زیان)
+ ۱۱ − ۸ − ۱۶ + ۱۴ − ۳۳ = − ۳۲

۳۳ - تبصره - مجموع دو مقدار که اندازهٔ عددی آنها متساوی ولی مختلف العلامه باشند صفر است

(زیان) (سود) (سود) زیان
− ۱۱ + ۱۱ = ۰ و + ۵a − ۵ a = ۰

تمرینات فصل دوم

۷۰ - روز گذشته صبح ۲۰۰ ریال در جیب داشتم ۱۰۰ ریال بکسی قرض دادم ۷۵ ریال طلب خود را دریافت داشتم ۳۵ ریال گم کردم و ۱۲ ریال در معامله ای سود بردم هریک از این اعمال را بوسیلهٔ اعداد جبری نمایش دهید

۷۱ - سه تیم فوتبال هریک ۲۰ بار مسابقه دادند تیم A ۹ بار برده و ۸ بار باخته و تیم B ۱۱ بار برده و ۷ بار باخته و تیم ۵ بار برده و ۶ بار باخته و در سایر بازیها متساوی بوده اند اولاً برد و باخت آنها را با عداد جبری نمایش دهید ثانیاً این سه تیم را برحسب لیاقتشان درجه بندی کنید

۷۲ - کوه نوردی از نقطهٔ عزیمت ۱۱۹ متر ببالا میرود ولی در نتیجهٔ لغزش سنگی ۷۳ متر بپائین میآید و مجدداً ۴۶ متر ببالا میرود اولاً هریک از این اعمال را با عداد جبری نمایش دهید ثانیاً معین کنید که وی در چند متری نقطهٔ عزیمت قرار دارد .

۷۳ - گرماسنجی ۵ درجه زیر صفر را نمایش میدهد اگر مایع داخلی آن ۱۴ درجه پائین بیاید یا ۲۳ درجه بالا برود چه اعدادی را نشان خواهد داد

۷۴ - در یک گروهان سرباز ۲۰ نفر بورزش مشغولند و ۶۸ نفر نیز در صف مشق میکنند ۱۳ نفر علیل و بستری و ۱۱ نفر از کار معاف اند حاضرین و غائبین را با عداد جبری نشان دهید و تعداد ، حاضر و غائب را معین نمائید

اعمال زیر را انجام داده مجموع جبری هر دسته از اعداد را مشخص نمائید

۷۵ - ۵a + ۷a + ۱۱a + a + ۲۳a

۷۶ - $7b + 10b + 11b + 9b + 2b$

۷۷ - $4x + x + 3x + 7x + 9x$

۷۸ - تعیین مجموع c، $100c$، $19c$، $15c$، $2c$، $8c$، $6c$

۷۹ - $-3x$، $-5x$، $-11x$، $-7x$

۸۰ - $-c$، $-2c$، $-50c$، $-13c$

۸۱ - $5x$، $-x$، $-3x$، $2x$، $-\frac{x}{2}$

۸۲ - $7y$، $-11y$، $16y$، $-3y$، $-2y$

۸۳ - $5x$، $-7x$، $-2x$، $7x$، $2x$، $-5x$

۸۴ - $7ab$، $-3ab$، $-5ab$، $2ab$، ab

۸۵ - $-9x^2 + 11x^2 + 3x^2 - 4x^2$

۸۶ - $3a^2x - 18a^2x + a^2x$

۸۷ - $3a^3 - 7a^3 - 8a^3 + 2a^3 - 11a^3$

۸۸ - $4x^3 - 5x^3 - 8x^3 - 7x^3$

۸۹ - $a^2b^2 - a^2b^2 - 7a^2b^2 + 5a^2b^2 - a^2b^2$

۹۰ - $-9x^4 - 2x^4 - 12x^4 + 13x^4 - 7x^4$

۹۱ - $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + x + \frac{2}{3}x$

۹۲ - $\frac{3}{2}a + \frac{3}{5}a - \frac{1}{2}a$

۹۳ - $-5b + \frac{1}{4}b - \frac{3}{2}b + 2b - \frac{1}{2}b + \frac{7}{2}b$

۹۴ - $-\frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - x^2$

فصل سوم - پرانتز ساده - عمل جمع

۳۴ - وقتی چندین مقدار حسابی بوسیلهٔ علامات + یا - بایکدیگر مربوط اند ترتیب قرار گرفتن جمله ها در اندازهٔ حاصل تأثیری ندارد و این خاصیت در مورد مقادیر جبری نیز برقرار است یعنی دو عبارت مانند $a - b + c$ و $a + c - b$ معادل یکدیگرند زیرا مفهوم عبارت اولی آنست که باید b را از a کاست و c را بر حاصل افزود و مفهوم دومی آن است که باید c را بر a افزود و b را از حاصل برداشت و فی الجمله در هر حال یک مقدار بر a افزوده شده و یک مقدار از آن کم شده است . عین این استدلال را میتوان در مورد هر عبارت جبری تکرار نمود و بنابراین جمله های هر عبارت را بنحوی که میل داشته باشیم مینویسیم مثلاً عبارت $a - b$ را میتوان بصورت $-b + a$ که معادل آنست نوشت زیرا همچنانکه در سابق گفتیم اگر a را بسود در یک معامله و b را بزیان در عمل دیگر تشبیه نمائیم اعم از اینکه سود قبل از زیان یا بعد از آن باشد حاصل مجموع دو عمل یکی خواهد بود .

۳۵ - مورد استعمال پرانتز را در شمارهٔ (۴ و ۱۶) گفتیم . اعمال راجع به پرانتز وکروشه وغیره را در عبارات جبری بتفصیل در فصل هفتم مطالعه می نمائیم در اینجا فقط بعضی حالات ساده را در نظر میگیریم :

عبارت (۱۳+۵) + ۸ چنین معنی میدهد که ۱۳ و ۵ باید با هم جمع شوند و مجموع آنها باید بر ۸ افزوده شود واضحست که اگر ۱۳ و ۵ جداگانه بر ۸ اضافه شوند و یا مجموع آنها اضافه شود فرقی در نتیجه حاصل نخواهد شد پس

$$۸ + (۱۳ + ۵) = ۸ + ۱۳ + ۵ = ۲۶$$

بهمین طریق $a+(b+c) = a+b+c$

عبارت (۱۳-۵) + ۸ چنین معنی میدهد که باید تفاضل ۱۳ و ۵ را بر ۸ افزود پس اگر ۱۳ را بر ۸ بیفزائیم ۵ واحد بیش از مقدار واقعی بر ۸ افزوده ایم و باید ۵ واحد از حاصل کم کنیم بنابراین $۸ + (۱۳ - ۵) = ۸ + ۱۳ - ۵ = ۱۶$

بهمین ترتیب $a+(b-c) = a+b-c$ (۱)

و با استدلال مشابهی معلوم میشود که

$$a+b-c+(d-e-f) = a+b-c+d-e-f \quad (۲)$$

و بالعکس $a+b-c+d-e-f = a+b-c+(d-e-f)$ (۳)

و نیز بنابر نتایج شمارهٔ (۳۴) داریم

مجموع a با $-b+c$ = مجموع a با $c-b$ $\quad a-b+c = a+c-b$

پس میتوان نوشت $a-b+c = a+(-b+c)$ (۴)

با ملاحظهٔ روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) قاعدهٔ کلی زیر حاصل میشود :

۳۶ - قاعده - وقتی که در عبارتی پرانتز موجود است و علامت + مقدم بر پرانتز وجود دارد میتوان بدون هیچ تغییری در عبارت مزبور پرانتز برداشت یا محل آن را تغییر داد بالعکس هر قسمت اختیاری از یک عبارت را میتوان بداخل یک پرانتز انتقال داد و مقدم بر پرانتز علامت + گذارد بدون آنکه تغییری در جمله های آن قسمت از عبارت داده شود

بنابراین میتوان نوشت :

$$a-b+c-d+e = a+(-b+c-d+e) = a-b+(c-d+e) = a-b+c+(-d+e)$$

۳۷ - معنی عبارت $a-(b+c)$ آنست که باید از a مجموع b و c را کاست واضح است که اگر b و سپس c را از a کم کنیم و یا مجموع آنها را یکجا از a کم نمائیم تغییری در نتیجهٔ حاصل نمیشود پس $a-(b+c) = a-b-c$

وبهمین ترتیب $a-(b-c)$ چنین معنی میدهد که باید تفاضل b و c را از a کم نمود هر گاه از a مقدار b را کم کنیم بقدر c بیش از اندازهٔ واقعی از a کم کرده ایم و بنابراین باید بر نتیجه c را افزود بنابراین $a-(b-c)=a-b+c$ و با استدلال تشابهی حاصل میشود :

$$a-b-(c-d-e)=a-b-c+d+e$$

از مطالب بالا قاعدهٔ زیر نتیجه میشود

۳۷ - قاعده - هرگاه عبارتی داخل پرانتز واقع بوده علامت - مقدم بر پرانتز باشد میتوان پرانتز را برداشت بشرط آنکه علامت تمام جمله های داخل پرانتز را تغییر داد .

بالعکس میتوان هر قسمت از یک عبارت را در داخل پرانتز قرار داد و علامت - را بر پرانتز مقدم ساخت بشرط آنکه علامت تمام جمله های داخل پرانتز را تغییر داد

پس مثلاً عبارت $a-b+c+d-e$ را میتوان بهر یک از صور زیر نوشت

$$a-(b-c-d+e)=a-b-(-c-d+e)$$
$$=a-b+c-(-d+e) \quad ..$$

خلاصهٔ مطالب مذکور در این مبحث عبارتست از :

اولاً اعمال جمع و تفریق را در یک عبارت میتوان بترتیب دلخواه انجام داد :

$$a+b-c+d-e-f=a-c+b+d-f-e$$
$$=a-c-f+d+b-e$$

ثانیاً - جمله های یک عبارت را میتوانیم بهر وضع که بخواهیم دسته بندی کنیم :

$$a+b-c+d-e-f=(a+b)-c+(d-e)-f$$
$$a+(b-c)+(d-e)-f=a+b-(c-d)-(e+f)$$

جمع جمله های غیر متشابه

۳۸ - دیدیم که میتوان چندین جملهٔ متشابه را جمع کرده همهٔ آنها را بیک جمله متشابه با آنها تبدیل نمود لیکن در جمع جمله های غیر متشابه تبدیل آنها بیک جمله ممکن نیست مثلاً مجموع دو جملهٔ a و b را میتوان فقط بصورت $a+b$ نوشت و این مقدار را مجموع دو جملهٔ مزبور نامند بهمین ترتیب بنابر آنچه راجع به برداشتن پرانتزها گفتیم مجموع دو جملهٔ a و $-b$ را میتوان بصورت $a+(-b)=a-b$ نوشت و این مقدار مجموع جبری اعداد a و $(-b)$ است

بنابراین ملاحظه میشود که در جبر کلمهٔ جمع بمعنائی اعم از معنی آن در حساب استعمال میگردد مفهوم $a-b$ در حساب آنست که باید b را از a کم نمود و جز این معنای دیگری ندارد ولی در جبر مقدار $a-b$ را میتوان بمعنای آن در حساب یا بمعنای

مجموع عدد a و عدد $b-$ در نظر گرفت و خلاصه آنکه $a-b$ خود بخود مقداری است که در آن وضع نسبی اعداد a و $b-$ و اعمالی که باید روی آنها انجام داد مورد توجه نیست

مثال ۱ - مطلوبست تعیین مجموع عبارات $۳a-۵b+۲c$ و $۲a+۳b-d$ و $-۴a+۲b$:

$$\text{مجموع} = (۳a-۵b+۲c)+(۲a+۳b-d)+(-۴a+۲b) =$$

$$۳a-۵b+۲c+۲a+۳b-d-۴a+۲b =$$

$$(۳a+۲a-۴a)+(-۵b+۳b+۲b)+۲c-d$$

$$= a+۲c-d$$

چنانکه دیده میشود برای جمع جمله های متشابه آنها را باهم در داخل یک پرانتز قرار داده حاصل پرانتز را بدست آورده ایم لیکن عمل جمع در غالب اوقات بقاعدهٔ زیر اجرا میشود :

۳۹ - قاعده - عبارات مفروض را در چند سطر زیر یکدیگر مینویسیم بطوریکه جمله های متشابه در یک ستون واقع شوند و سپس از چپ براست مجموع جمله های هر ستون را بدست آورده حاصل های جزء را باهم جمع جبری مینمائیم .

$$\begin{array}{llll} ۳a & -۵b & +۲c & \\ ۲a & +۳b & & -d \\ -۴a & +۲b & & \\ \hline a & & +۲c & -d \end{array}$$

مجموع جبری جمله های ستون اول a و مجموع جبری جمله های ستون دوم صفر است و تنها جملهٔ ستون سوم و ستون چهارم را با علامت آنها بدون تغییر در حاصل نوشته ایم

مثال ۲ - مطلوبست تعیین مجموع عبارات $-۵ab+۶bc-۷ac$ و $۸ab+۳ac-۲ad$ و $-۲ab+۴ac+۵ad$ و $bc-۳ab+۴ad$

در این مورد نیز هر عبارت را چنان مرتب کرده ایم که جمله های متشابه در یک ستون قرار گیرند و مجموع جمله های هر ستون را علیحده بدست آورده ایم

$$\begin{array}{llll} -۵ab & +۶bc & -۷ac & \\ ۸ab & & +۳ac & -۲ad \\ -۲ab & & +۴ac & +۵ad \\ -۳ab & +bc & & +۴ad \\ \hline -۲ab & +۷bc & & +۷ad \end{array}$$

بُعد و درجهٔ یک جملهٔ - قوای صعودی و نزولی عبارات

۴۰ - هریک از حروفی که یک جمله را تشکیل میدهند یک بُعد آن جمله نامیده میشود و تعداد حروف یا ابعاد موجود در یک جمله را (اعم از مکرر و غیر مکرر) درجهٔ آن جمله مینامند .

مثلاً حاصلضرب abc جمله ایست سه بعدی یا از درجهٔ سوم و $ax^۴$ جمله ایست

پنج بعدی یا از درجهٔ پنجم

ضرائب عددی را جزء ابعاد جمله محسوب نمیدارند بنابراین $8a^2b^5$ و a^5b^2

هر دو دارای ۷ بعد یا از درجهٔ هفتم میباشند

درجهٔ هر عبارت همان درجهٔ جمله ای از آن عبارتست که تعداد ابعاد آن بیش از تمام جمله های دیگر باشد ، بنابراین عبارت a^4-8a^2+2a-5 عبارتی است از درجهٔ چهارم و عبارت $a^2x-7b^2x^3$ عبارتی است از درجهٔ پنجم

گاهی اوقات درجهٔ یک عبارت را فقط برحسب یکی از حروف موجود در جمله های آن عبارت محسوب میدارند مثلاً عبارت $ax^3-bx+cx-d$ عبارتی است که برحسب x از درجهٔ سوم است . هر عبارت را که شامل چند جمله باشد همگن یا متجانس مینامند وقتی که درجهٔ تمام جمله های آن متساوی باشند مثلاً عبارت $8a^6-a^4b^2+9ab^5$ عبارتی است همگن و از درجهٔ ششم

۴۱ - قوای مختلف یک حرف جمله های غیر متشابه میباشند بنابراین مثلاً مجموع $2x^3$ و $3x^2$ را نمیتوان بصورت جملهٔ واحدی نمایش داد و فقط میتوان آنرا بصورت $2x^3+3x^2$ نوشت همچنین است در مورد مجموع جبری $5a^2b^2$ و $3ab^3-b^4$ که میتوان آنرا فقط بصورت $5a^2b^2-3ab^3-b^4$ نوشت و نمیتوان آنرا

بصورت ساده‌تری درآورد .

در جمع عباراتی که شامل جمله هائی از قوای مختلف یک حرف میباشند بهتر آنست که هر عبارت را برحسب قوای نزولی یا صعودی آن حرف مرتب نمائیم . مقصود از مرتب کردن برحسب قوای نزولی آنست که در یک عبارت جمله ای را که درجهٔ آن برحسب حرف مزبور از همه بزرگتر است سمت چپ سایر جمله ها نوشته و سپس جمله های دیگر را بتوالی آن بنویسیم بطوریکه هر جمله که در سمت چپ جملهٔ دیگر است درجهٔ آن از جملهٔ سمت راستش بزرگتر باشد خلاف این ترتیب را مرتب کردن برحسب قوای صعودی مینامند .

مثال ۱ - مطلوبست تعیین مجموع عبارات $3x^3+7+6x-5x^2$ ، $2x^2-8-9x$ ، $4x-2x^3+3x^2$ ، $3x^3-9x-x^2$ و $x-x^2-x^3+4$

در موقع عمل در هر عبارت ابتدا بزرگترین قوت x و سپس قوتی از x را که بلافاصله از آن کمتر است نوشته ایم و آخر همه جمله ای را که در آن x نیست قرار داده ایم بطوریکه در هر ستون فقط یکی از قوای x وجود دارد یعنی جمله های هر ستون متشابهند . اگر در جمله ای یکی از قوای x وجود نداشت جای آنرا در ستون مربوط خالی گذاشته ایم

$$
\begin{array}{rrrr}
3x^3 & -5x^2 & +6x & +7 \\
 & 2x^2 & -9x & -8 \\
-2x^3 & +3x^2 & +4x & \\
3x^3 & -x^2 & -9x & \\
-x^3 & -x^2 & +x & +4 \\
\hline
3x^3 & -2x^2 & -7x & +3
\end{array}
$$

مثال ۲ - مطلوب است تعیین مجموع عبارات $5a^2b - ab^2 - 2a^3$ ، $3ab^2 - 2b^3 + a^3$ و $8a^3 + 5b^3$ ، $9a^2b - 2a^3 + ab^2$:

در این مورد هر عبارت شامل قوای دو حرف است و آنها را طوری مرتب ساخته‌ایم که هر عبارت برحسب قوای نزولی . و قوای صعودی نوشته شود

$$
\begin{array}{rrrr}
-2b^3 & +3ab^2 & & +a^3 \\
 & -ab^2 & +5a^2b & -2a^3 \\
5b^3 & & & +8a^3 \\
 & ab^2 & +9a^2b & -2a^3 \\
\hline
3b^3 & +3ab^2 & +14a^2b & +4a^3
\end{array}
$$

مسائل و تمرینات فصل سوم

مطلوب است محاسبهٔ مجموع عبارات زیر :

۹۵ - $2a - 2b + c$ ، $-2a + b + 2c$ ، $a + 2b - 3c$

۹۶ - $2x + 3y - x$ ، $2x - y + 2z$ ، $-x + 2y + 3z$

۹۷ - $a - b + c$ ، $-2a + 2b - 8c$ ، $4a + 2b + 5c$

۹۸ - $a + 5b + 9c$ ، $12a + 15b + 8c$ ، $-15a - 19b - 18c$

۹۹ - $4a + 5b - c$ ، $10a + 5b + c$ ، $-14a - 10b + 5c$

۱۰۰ - $2ax + 2by + 2cz$ ، $ax + 2by - cz$ ، $5ax - 7by - cz$

۱۰۱ - $p + q - 20r$ ، $p - 20q + r$ ، $20p + q - r$

۱۰۲ - $-ab + 2ca + bc$ ، $ab - bc + ca$ ، $5ab + bc - 3ca$

۱۰۳ - $pq - qr + rp$ ، $-pq + qr + rp$ ، $pq + qr - rp$

۱۰۴ - $x^2 - 2xy - xy^2$ ، $2y^2 + 5xy - 2x^2$ ، $2x^2 - 2xy + 3y^2$

۱۰۵ - $3a^2 - 7ab - 4b^2$ ، $-2a^2 + 9ab - 2b^2$ ، $4a^2 + ab + 5b^2$

۱۰۶ - $x + xy - y^2$ ، $-z + yz + y^2$ ، $-x + xz + z^2$

۱۰۷ - $x - 3xy + 3y^2$ ، $3x^2 + 4xy - 5y^2$ ، $x + xy + y^2$

۱۰۸ - $x^3 - x^2 + x - 1$ ، $2x^2 - 2x + 2$ ، $-3x^3 + 5x + 1$

۱۰۹ - $x^5 - 4x^4y - 5x^2y^3$ ، $2x^4y + 2x^3y^2 - 6xy^4$ ، $3x^3y^2 + 4xy^4 - y^5$

۱۱۰ - $x^3 - 4x^2y + 6xy^2$ ، $3x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ ، $y^3 + 3x^2y + 4xy^2$

۱۱۱ - $-\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b$ ، $-\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b$ ، $-2a - b$

۱۱۲ - $\frac{11}{5}b - c$ ، $2a - 3b$ ، $-\frac{13}{8}a - \frac{11}{4}c$

۱۱۳ - $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}y^2$ ، $-x^2 - \frac{2}{3}xy + 2y^2$ ، $\frac{2}{3}x^2 - xy - \frac{5}{4}y^2$

۱۱۴ - $2a^2 - \frac{2}{5}ab\ \frac{1}{2}b^2$ ، $\frac{3}{2}a^2 + 2ab - \frac{2}{3}b^2$ ، $-\frac{1}{3}a^2 - ab + b^2$

فصل چهارم ـ تفریق

۴۲ ـ ساده ترین حالات عمل تفریق را قبلاً تحت عنوان جمع جبری جمل متشابه گفتیم و آن در وقتی بود که بعضی از جمل متشابه منفی بودند .

از قبیل:

$$5a - 3a = 2a$$

$$3a - 7a = -4a \;;\; -3a - 6a = -9a$$

و نیز بنا بر قاعدهٔ برداشتن و گذاشتن پرانتزها داریم :

$$3a - (-8a) = 3a + 8a = 11a$$

و نیز

$$-3a - (-8a) = -3a + 8a = 5a$$

عمل تفریق جمله های غیر متشابه

۴۳ ـ طریقهٔ عمل از مثال زیر معلوم میشود :

مثال ـ میخواهیم عبارت $3a - 2b - c$ را از عبارت $4a - 3b + 5c$ تفریق کنیم .

عبارتی را که میبایستی تفریق شود ابتدا در داخل پرانتز قرار داده علامت ـ را بر پرانتز مقدم ساختیم

تفاضل $= 4a - 3b + 5c - (3a - 2b - c)$

سپس پرانتز را برداشتیم

$= 4a - 3b + 5c - 3a + 2b + c$

جمله های متشابه را مجاور هم نوشتیم

$= 4a - 3a - 3b + 2b + 5c + c$

$= a - b + 6c$

مثل سابق عمل تفریق را انجام دادیم

بهتر است که عمل را بطریق زیر انجام دهیم :

علامت جمله های عبارت مفروق را تغییر داده دو عبارت را زیر هم نوشتیم بطوریکه جمله های متشابه در یک ستون واقع شوند و در هر ستون جمع جبری انجام دادیم

$$\begin{array}{r} 4a - 3b + 5c \\ -3a + 2b + c \\ \hline a - b + 6c \end{array}$$

نتیجهٔ عمل جمع : $a - b + 6c$

۴۴ ـ قاعده ـ علامت تمام جمله ها را در عبارت مفروق عوض کرده آنرا با عبارت مفروق منه جمع جبری مینمائیم

۴۵ ـ تبصره ـ میتوان از عمل تغییر علامت جمله ها صرف نظر کرده دو عبارت را زیر یکدیگر نوشت وضمن انجام عمل تفریق تغییر علامت را در ذهن انجام داد

مثال ۱ ـ میخواهیم عبارت $2x^2 + 8xy - 7y^2$ را از عبارت $5x^2 + xy$ کم کنیم در ستون اول $5x^2$ و $2x^2$ را در ذهن از یکدیگر تفریق مینمائیم یعنی $5x^2$ را با $-2x^2$ جمع میکنیم . در جملهٔ آخر علامت جمله $-7y^2$ را باید قبل از نوشتن در حاصل تفریق تغییر داد

$$\begin{array}{r} 5x^2 + xy \\ 2x^2 + 8xy - 7y^2 \\ \hline 3x^2 - 7xy + 7y^2 \end{array}$$

مثال ۲ - میخواهیم عبارت $3x^2-2x$ را از عبارت $1-x^3$ کم کنیم:

در ستون اول و آخر چون هیچ جملهٔ تفریق شدنی وجود نداشت عین دو جملهٔ x^3 - و ۱ + را نوشتیم در دو جملهٔ دیگر $3x^2$ و $2x$ - را تغییر علامت داده در عبارت تفاضل قرار دادیم

$$\begin{array}{r} -x^3 \qquad\qquad +1 \\ 3x^2-2x \quad \\ \hline -x^3-3x^2+2x+1 \end{array}$$

۴۶- تبصره - مرتب کردن جمله‌ها برحسب قوای صعودی یا نزولی یک حرف در عبارات سطر اول مورد احتیاج قطعی نیست ولی مفید است زیرا تفاضل نیز برحسب قوای صعودی یا نزولی حرف مزبور بدست میآید

مسائل و تمرینات فصل چهارم

اعمال تفریق زیر را انجام دهید :

۱۱۵- $4a-3b+c$ را از $2a-3b-c$

۱۱۶- $2x-8y+z$ را از $15x+10y-18z$

۱۱۷- $15a-27b+8c$ را از $5a+2b+4c$

۱۱۸- $yz-zx+xy$ را از $xy+yz-zx$

۱۱۹- x^3-x+1 را از $-2x^3-x^2-3x+2$

۱۲۰- $4xy^2-5xyz$ را از $-8x^2y+15xy+10xyz$

۱۲۱- $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$ را از $\frac{1}{2}a-b+\frac{1}{3}c$

۱۲۲- $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z$ را از $\frac{3}{2}x+y-z$

۱۲۳- $\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$ را از $-a-3b$

۱۲۴- $4-3ab-5a^2b^2$ را از $-8+6ab+a^2b^2$

۱۲۵- $5a^2b-7ab^2+6cd$ را از $-7a^2b+8ab^2+cd$

۱۲۶- x^3+x+1 را از x^3+x^2-x+1

۱۲۷- $3xy^2-3x^2y+x^3-y^3$ را از $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

۱۲۸- $x^4+5+x-3x^3$ را از $5x^4-8x^3-2x^2+7$

۱۲۹- $-\frac{3}{2}x^2+xy-y^2$ را از $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy-\frac{3}{4}y^2$

۱۳۰- $-\frac{2}{3}a^2+a-\frac{1}{2}$ را از $\frac{2}{3}a^2-\frac{5}{2}a-1$

فصل پنجم - ضرب

۴۷ - بدوی ترین تعریف عمل ضرب عبارتست از عمل جمع چندین مقدار مساوی مثلاً -

$$۳ + ۳ + ۳ + ۳ = ۴ \text{ مرتبه عدد } ۳ = ۳ \times ۴$$

در این مورد مضروب فیه دارای ۴ واحد است و تعداد دفعاتی که مضروب را تکرار نموده ایم مساوی با عدهٔ آحاد موجود در مضروبٌ فیه یعنی ۴ میباشد بهمین ترتیب

$$a \times b = a \text{ بتعداد دفعه عدد } \underbrace{a + a + a + \cdots\cdots}_{b \text{ دفعه}}$$

میدانیم که $۴ \times ۳ = ۳ \times ۴$ است و بهمین قرار تا وقتی که اعداد a و b اعداد مثبت و صحیح باشند میتوان بسهولت ثابت کرد که $a \times b = b \times a$

(این موضوع را در حساب ثابت مینمایند)

۴۸ - وقتی که مضروب یا مضروبٌ فیه یا هر دو آنها اعداد صحیح یا مثبت نباشند عمل ضرب را میتوان بطریق زیر تعریف نمود :

مقصود از ضرب عدد a در عدد b انجام عملی است در مورد a چنانکه اگر همان عمل را در مورد واحد انجام دهند عدد b حاصل شود :

مثلاً میخواهیم عدد $\frac{۴}{۵}$ را در $\frac{۳}{۷}$ ضرب نمائیم . مقصود آنست که در مورد $\frac{۴}{۵}$ همان

عملی را انجام دهیم که اگر در مورد واحد انجام گیرد $\frac{۳}{۷}$ بدست آید . عملی که هرگاه در مورد واحد انجام گیرد $\frac{۳}{۷}$ بدست آید عبارتست از آنکه واحد را بهفت قسمت متساوی تقسیم کرده و سه قسمت از آن تقسیمات را اختیار نمائیم پس باید ابتدا $\frac{۴}{۵}$ را نیز بهفت قسمت تقسیم کرد که هر قسمت آن مساوی میشود با $\frac{۴}{۵ \times ۷}$ و چون سه قسمت از آنها را اختیار کنیم حاصل میشود $\frac{۴ \times ۳}{۵ \times ۷}$

لیکن میدانیم که $۳ \times ۴ = ۴ \times ۳$ و $۷ \times ۵ = ۵ \times ۷$ پس

$$\frac{۴}{۵} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۴ \times ۳}{۵ \times ۷} = \frac{۳ \times ۴}{۷ \times ۵} = \frac{۳}{۷} \times \frac{۴}{۵}$$

بنابراین اگر a و b اعداد مثبت صحیح یا کسری باشند همواره داریم : $a \times b = b \times a$ ومیتوان این قاعدهٔ کلی را در مورد چند عامل ضرب نیز تعمیم داد

$$abc = a \times b \times c = (a \times b) \times c = (b \times a) \times c = bac$$

$$= b \times (a \times c) = b \times (c \times a) = bca$$

پس داریم :

$$۲a \times ۳b \times c = ۲ \times ۳ \times a \times b \times c = ۶abc$$

۴۹ - از قواعد فوق ضمناً چنین استنباط میشود که میتوانیم عوامل یک حاصلضرب را بهر طریق که بخواهیم دسته بندی کنیم :

$$abcd = (ab) \times (cd) = a \times (bc) \times d = a \times (bcd)$$

۵۰ - قاعدهٔ ضرب دو عبارت یک جمله ای در یکدیگر - ابتدا فرض کنیم که میخواهیم a^3 را در a^5 ضرب کنیم :

بموجب تعریف داریم $a^3 = aaa$ و $a^5 = aaaaa$ پس

$$a^3 \times a^5 = aaa \times aaaaa = aaaaaaaa = a^{3+5} = a^8$$

پس نمای هر حرف در حاصلضرب دو عامل مساوی با مجموع نماهای همان حرف در هر یک از دو عامل مزبور است .

حال فرض کنیم که مقصود ضرب $5a^2$ در $7a^3$ است در اینحال داریم

$$5a^2 \times 7a^3 = 5aa \times 7aaa = 35aaaaa = 35a^5$$

و بالأخره هرگاه منظور ضرب دو یک جمله ای بصورت $5a^3b^2$ و $8a^2bx^3$ باشد که دارای حرفهای مختلف میباشند گوئیم :

$$5a^3b^2 \times 8a^2bx^3 = 5aaabb \times 8aabxxx = 40a^5b^3x^3$$

۵۱ - تبصره - مبتدیان باید در نظر داشته باشند که نمای یک حرف را نمیتوان بهیچ عنوان با نماهای حروف دیگر ترکیب نمود و بنابراین مثلاً عبارت $40a^5b^3x^3$ بهیچ صورت دیگر قابل تبدیل نیست.

۵۲ - قاعده - برای ضرب دو عبارت یک جمله ای در یکدیگر ابتدا ضرائب آنها را درهم ضرب کرده آن را ضریب حاصل ضرب قرار میدهیم و سپس حروف دیگر موجود در دو جملهٔ مزبور را بتوالی یکدیگر نوشته نمای هر حرف را مساوی مجموع نماهای همان حرف در هر یک از دو جملهٔ مزبور قرار میدهیم . هرگاه تعداد عباراتی که باید درهم ضرب شوند از دو بیشتر باشد قاعدهٔ ضرب عیناً مثل حالت فوق است

مثال ۱- تعیین حاصلضرب x^2 و x^3 و x^8

$$x^2 \times x^3 \times x^8 = x^{2+3} \times x^8 = x^{2+3+8} = x^{13}$$

مثال ۲- تعیین حاصلضرب $5x^2y^3$ و $8y^2z^5$ و $3xz^4$:

حاصلضرب $= 5x^2y^3 \times 8y^2z^5 \times 3xz^4 = 120x^3y^5z^9$

۵۳ - قاعدهٔ ضرب یکجمله ای در عبارت چند جمله ای - بموجب تعریف عمل ضرب

$$(a+b)m = m + m + m + \cdots \text{(مرتبه } a+b\text{)}$$

$$= (m + m + \cdots \text{ مرتبه } a) + (m + m + \cdots \text{ مرتبه } b)$$

$$= am + bm \qquad (1)$$

وبهمین ترتیب :

مرتبه $a-b$ $\quad (a-b)m = m+m+m \ldots\ldots\ldots$

b مرتبه) $\quad = (m+m+m+\ldots$ مرتبه $a) - (m+m+m \ldots\ldots$

$= am - bm \qquad (۲)$

وبهمین قرار نتیجه میشود که $\quad (a-b+c)m = am - bm + cm$

پس حاصلضرب یک جمله در یک عبارت مساوی است با مجموع جبری حاصلضرب های آن جمله در جمله های عبارت مزبور

۵۴ - تبصره - باید دانست که موقتاً در استدلال فوق فرض کرده ایم a و b و c اعداد صحیح مثبت باشند و b نیز از a بزرگتر باشد

مثال - $\quad 3(2a+3b-4c) = 6a+9b-12c$

همچنین $\quad (4x^2-7y-8z^2) \times 3xy^2 = 12x^3y^2 - 21xy^3 - 24xy^2z^2$

تمرینات

مطلوب است محاسبهٔ حاصل ضرب :

۱۳۱ - $5x^2 \times 7x^5$ $\qquad$ ۱۳۲ - $4x^3 \times 5a^6$

۱۳۳ - $8a^3b \times b^5$ $\qquad$ ۱۳۴ - $2abc \times 2ac^2$

۱۳۵ - $4a^2b^3 \times 7a^5$ $\qquad$ ۱۳۶ - $5a^4b \times x^2y^2$

۱۳۷ - $3a^4b^7x^3 \times 5a^3bx$ $\qquad$ ۱۳۸ - $6a^3bx \times 7b^2x^4$

۱۳۹ - $2x^3$ و $5x+3y$ $\qquad$ ۱۴۰ - a^2b و $a^2+b^2-c^2$

۱۴۱ - $2x^2$ و $5x+3y$ $\qquad$ ۱۴۲ - a^2b و $a^2+b^2-c^2$

۱۴۳ - $2x^2$ و $5xy+xy^2-7xy^2$ $\qquad$ ۱۴۴ - a^2b و $a^2+b^2-c^2$

۵۴ - قاعدهٔ ضرب چند جمله ای ها در یکدیگر - هرگاه در دستورهای (۱) و (۲) شمارهٔ (۵۳) بجای m مقدار $c+d$ را قرار دهیم نتیجه میشود :

$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) =$

$ac + ad + bc + bd$

ونیز $\quad (a-b)(c+d) = a(c+d) - b(c+d)$

$= ac + ad - (c+d)b =$

$ac + ad - (bc + bd) = ac + ad - bc - bd \qquad (۴)$

بهمین ترتیب هرگاه در روابط (۱) و (۲) بجای m مقدار $c-d$ را قرار دهیم حاصل میشود $\quad (a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d)$

$= ac - ad + bc - bd \qquad (۵)$

ونیز $\quad (a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d)$

$$= (c-d)a - (c-d)b =$$

$$ac - ad - (bc - bd) =$$

$$= ac - ad - bc + bd \qquad (۶)$$

هرگاه هرجملهٔ واقع درسمت راست دستور (۶) را درنظر گرفته ملاحظه کنیم که این جمله چگونه بدست آمده است نتائج زیر حاصل میشود :

$$(+a) \times (+c) = +ac$$

$$(-b) \times (-d) = +bd$$

$$(-b) \times (+c) = -bc$$

$$(+a) \times (-d) = -ad$$

وازآنجا قاعدهٔ زیر که بقاعدهٔ علامتها درعمل ضرب موسوم است بدست میآید ،

۵۵ ـ قاعده علامتها ـ حاصل ضرب دوجمله که علامت آنها یکی باشد مثبت است وحاصل ضرب دوجمله که علامت آنها مختلف باشد منفی است .

۵۶ ـ تصور قاعدهٔ علامتها وبخصوص وجود مضروبٌ فیه منفی ممکن است برای مبتدیان مشکل باشد مثالهای عددی زیر تا اندازه ای درروشن ساختن موضوع وتعبیر مضروبٌ فیه منفی مفید واقع میگردند :

عدد ۴ ـ بدینطریق بدست آمده است که چهار مرتبه واحد را اختیار کرده علامت آن را تغییر داده ایم ومفهوم ضرب عدد (۴ـ) درعدد ۳ آنست که عدد ۳ را چهار مرتبه اختیار نموده وعلامت حاصل را تغییر دهیم پس چون ۱۲=۴×۳ است ۱۲ـ = (۴ـ) × ۳ میباشد

بهمین ترتیب مفهوم (۴ـ) × (۳ـ) آنست که عدد (۳ـ) را چهار مرتبه اختیار نموده وعلامت حاصل را تغییر داده ایم پس چون ۱۲ـ = ۴× (۳ـ) است بنابراین ۱۲+ = (۴ـ) × (۳ـ) میباشد .

پس مفهوم ضرب در مقدار منفی آنست که عمل ضرب را مانند حالتی که مضروبٌ فیه مثبت است انجام داده علامت حاصلضرب را تغییر دهیم .

۵۷ ـ تبصرهٔ مهم ـ باید دانست که علم جبر بدو قسمت اساسی تقسیم میگردد قسمت اول که درحقیقت تعمیم حساب محسوب میگردد فقط از اعداد واعمالی که از نظر حساب دارای معنی بوده قابل اجرا میباشند گفتگو مینماید . دراین مبحث تعاریف همان تعاریف مذکور درحساب میباشند واجرای اعمال اصلی نیز همان است که بود وفقط حروف را جانشین اعداد حسابی ساخته قواعد حساب را بدینوسیله تعمیم میدهند ـ واضح است که دراین مبحث از جبر ذکر بسیاری از قواعد وقوانین

کلی و اصلی غیر ممکن میباشد .

در قسمت دوم که مبحث اساسی جبر محسوب میگردد اعمال و قوانین حساب را در تمام موارد قابل قبول و اجرا فرض کرده آنها را در مواردی که از نظر حساب غیر ممکن بوده اند بوسیله ای تعبیر یا تفسیر مینمایند . ساده ترین مثال راجع باین موضوع تعبیری است که در جبر از اعداد منفی نموده ایم : مثلاً در حساب عمل تفریقی از قبیل ۱۴ - ۸ غیر قابل اجرا میباشد ولی این عمل از نظر جبر ممکن و مقدار آن ۷- است و تعبیر آن از مثال زیر معلوم میشود : هرگاه شخصی ۸ ریال پول داشته باشد و بخواهد با آن ۱۵ ریال قرضش را بدهد میخواهیم بدانیم چقدر برایش باقی میماند . تعبیر عدد ۷- آنست که این شخص ۸ ریال را بطلبکار داده و (۷-) ریال برایش باقیمانده یعنی هنوز ۷ ریال دیگر بآن شخص مقروض است .

برای اینکه موضوع روشن تر شود مثال زیر را ذکر مینمائیم :

دو نفر یکی a ریال و دیگری b ریال پول دارند و هر کدام سالیانه ۱۰۰ ریال بر پول خود میافزایند میخواهیم معین کنیم پس از چند سال دارائی اولی ۷ برابر دارائی دومی میشود .

برای حل مسئله اگر مدت مزبور را x سال فرض نمائیم پس از x سال هرکدام

$100x$ ریال بر دارائی خود افزوده اند لذا اولی $a+100x$ ریال و دومی $b+100x$ ریال دارد و بنا بر آنچه در صورت مسئله گفته شد داریم

$$7(b+100x) = a+100x$$

و یا

$$7b+700x = a+100x$$

اگر از طرفین این تساوی یکدفعه $100x$ و یکدفعه $7b$ را کم کنیم حاصل میشود :

$$600x = a-7b$$

و یا

$$x = \frac{a-7b}{600}$$

حال اگر در اینجا به a و b عددهای مختلف نسبت دهیم مقدار x بدست میآید . مثلاً بازاء $a = 2000$ و $b = 200$ حاصل میشود :

$$x = \frac{2000-1400}{600} = 1$$

و واضح است که برای اینکه مسئله ممکن باشد باید همیشه عدد a را طوری انتخاب کرد که از ۷ برابر عدد b بزرگتر باشد زیرا در غیر اینصورت انجام عمل تفریق در صورت کسر غیر ممکن میباشد ولی در جبر قبول میکنیم که اگر a از b کوچکتر شود باز هم مسئله ممکن است زیرا مثلاً اگر $b = 400$ و $a = 1600$ باشد داریم :

$$x = \frac{a - ۷b}{۶۰۰} = \frac{۱۶۰۰ - ۲۸۰۰}{۶۰۰} = \frac{-۱۲۰۰}{۶۰۰} = -۲$$

و تعبیر عدد ۲- آنست که دو سال قبل از این تاریخ پول اولی دو برابر دومی بوده است و این واضح است زیرا دو سال قبل $a = ۱۶۰۰ - ۲۰۰ = ۱۴۰۰$ و $b = ۴۰۰ - ۲۰۰ = ۲۰۰$ بوده و $۱۴۰۰ = ۲۰۰ \times ۷$

بنابرآنچه گفته شد میتوانیم بطور کلی قواعد حسابی را در هر مورد که خواستیم تعمیم داده و آنها را در صورت لزوم تعبیر نمائیم :

در دستور مرابحهٔ $i = \frac{a \times r \times t}{۱۰۰}$ (i ربح و a سرمایه و r نرخ و t زمان) میتوانیم بجای a و r و t اعداد مختلف قرار دهیم اگر بجای a و r عدد مثبت و بجای t عدد منفی قرار دهیم مقدار i (سود) منفی و اصل و فرع سرمایه از اصل آن کمتر میشود و تعبیر این موضوع آنست که عمل فوق همان عملی است که در حساب آنزاتنزیل مینامند یعنی میخواهیم سرمایه‌ای را قبل از موعد مقرر دریافت داریم بنابراین باید چیزی از آن کسر کرده مابقی را وصول کنیم و تعبیر زمان منفی همان زمان قبل از موعد مقرر است .

ونیز در نتایج شماره های ۵۳ و ۵۴ و ۵۵ که در آنها a و b و c و d اعداد صحیح و مثبت فرض شده $a > b$ و $c > d$ بوده است میتوانیم نتایج

حاصله را در تمام موارد و بازاء هر مقدار از a و b و c و d قابل قبول فرض نمائیم و این اصل را در مورد قاعده علامتها نیز بکار میبریم و آنها را محدود بحالات اعداد مثبت و صحیح نمی نمائیم .

مثالهای زیر نشان میدهند که چگونه میتوان در دستورهای جبری بجای حروف مقادیر منفی قرار داده حاصل عبارات را بدست آورد :

مثال ۱ - میخواهیم بازاء $a = -۴$ مقدار $a^۳$ را حساب کنیم

$$a^۳ = (-۴)^۳ = (-۴) \times (-۴) \times (-۴) = -۶۴$$

بوسیلهٔ استعمال مکرر قاعده علامتها معلوم میشود که تمام قوای زوج اعداد منفی عدد مثبت و تمام قوای فرد اعداد منفی عدد منفی است

مثال ۲ - مطلوب است مقدار عبارت $-۳a^۴bc^۳$ بازاء

$$a = -۱ \quad و \quad b = ۳ \quad و \quad c = -۲$$

$$-۳a^۴bc^۳ = -۳ \times (-۱)^۴ \times ۳ \times (-۲)^۳$$

$$= -۳ \times (+۱) \times ۳ \times (-۸) = ۷۲$$

در اینجا بجای $(-۱)^۴$ عدد ۱+ و بجای $(-۲)^۳$ عدد ۸- را قرار دادیم

مثالهای زیر طریقهٔ بکار بردن قاعدهٔ علامتها در عمل ضرب را روشن میسازند

مثال ۱ - مطلوبست محاسبهٔ حاصلضرب $4a$ و $-3b$

بنابر قاعدهٔ علامتها علامت مقابل حاصلضرب - است وچون $3b \times 4a = 12ab$

پس داریم $4a \times (-3b) = -12ab$

مثال ۲ - مطلوبست محاسبهٔ حاصلضرب $-5abx^{2}$ و $-abx^{2}$

دراینجا مقدار مطلق حاصلضرب عبارتست از $5a^{2}b^{6}x^{2}$ و بنابر قاعده علامتها حاصلضرب مثبت است پس

$$(-5abx^{2}) \times (-abx^{2}) = 5a^{2}b^{6}x^{2}$$

مثال ۳ - مطلوبست حاصلضرب سه عبارت $3a^{2}b$ و $-2a^{3}b^{2}$ و $-ab^{4}$

معمولاً بهتر است حاصلضرب را یکدفعه بدست آوریم

$$3a^{2}b \times 2a^{3}b^{2} \times ab^{4} = 6a^{6}b^{7}$$

وعلامت آن بنابر قاعدهٔ علامتها مثبت است

$-ab \quad -2a^{3}b^{2} \quad 3a^{2}b$

$$3a^{2}b \times (-2a^{3}b^{2}) = -6a^{5}b^{3}$$

$$(-6a^{5}b^{3}) \times (-ab^{4}) = 6a^{6}b^{7}$$

مثال ۴ - مطلوبست محاسبهٔ حاصلضرب $-\frac{3}{4}ab$ در عبارت

$$6a^{3} - \frac{5}{3}a^{2}b - \frac{4}{5}ab^{2}$$

حاصلضرب مطلوب عبارتست از مجموع جبری حاصلضربهای جزء که بنابر قاعدهٔ شمارهٔ ۵۲ بدست میآیند

$$(6a^{3} - \frac{5}{3}a^{2}b - \frac{4}{5}ab^{2}) \times (-\frac{3}{4}ab^{2}) =$$

$$-\frac{9}{2}a^{4}b^{2} + \frac{5}{4}a^{3}b^{3} + \frac{3}{5}a^{2}b^{4}$$

تمرینات

هرگاه $a=-2$ و $b=3$ و $c=-1$ و $x=-5$ و $y=4$

باشد مطلوب است محاسبهٔ عبارات زیر

۱۴۵ - $-7c^{2}xy$

۱۴۶ - $8ax$

۱۴۷ - $4c^{5}x^{3}$

۱۴۸ - $5a^{3}b^{3}c^{2}$

۱۴۹ - $7a^{3}c^{3}$

۱۵۰ - $8c^{4}x^{3}$

۱۵۱ - $7a^{5}c^{4}$

هرگاه $a=-4$ و $b=-3$ و $c=-1$ و $f=0$ و $x=4$ و $y=1$

باشد مطلوب است محاسبهٔ عبارات زیر

۱۵۲ - $3a^{2}+bx-4cy$

۱۵۳ - $2ab^{2}-3bc^{3}+2fx$

۱۵۴ - $3a^{2}y^{3}-5b^{2}x-2c^{3}$

۱۵۵ - $3b^{2}y^{4}-4b^{2}f-6c^{4}x$

۱۵۶ - $2\sqrt{ac}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt{b^{2}c^{4}}$

۱۵۷ - $7\sqrt{a^{2}x}-3\sqrt{b^{4}c^{2}}+5\sqrt{f^{2}x}$

مطلوب است محاسبهٔ حاصلضربهای زیر

۱۵۸ - ax و $-3ax$

۱۵۹ - $-2abx$ و $-7abx$

۱۶۰ - $6x^{2}y$ و $10xy$

۱۶۱ - xyz و $-5x^{2}y^{2}z$

۱۶۲ - $3xy+4yz$ و $-12xyz$

۱۶۳ - $ab-bc$ و $a^{2}bc^{2}$

۱۶۴ - $a^{2}-b^{2}+c^{2}$ و abc

۱۶۵ - $-2a^{2}b-4ab^{2}$ و $-7a^{2}b^{2}$

۱۶۶ - $-7x^{2}y-5xy^{2}$ و $-8x^{2}y^{2}$

۱۶۷ - $6x^{2}y^{2}z^{2}-8xyz$ و $-12x^{2}yz^{3}$

۱۶۸- $-15x^2y - 13xy^3 \;،\; -7x^3y^3$

۱۶۹- $-10x^3yz^3 + 8xyz \;،\; -xyz$

۱۷۰- $4c - 3b + 2a \;،\; -\frac{3}{2}a$

۱۷۱- $-\frac{3}{2}a^2 + ax - \frac{2}{5}x^2 \;،\; -\frac{5}{3}a^2x^2$

۵۸ - نتایجی را که در شمارهٔ ۵۴ بدست آوردیم میتوان بحالاتیکه یکی از دو عبارت ضرب شدنی یا هر دو آنها شامل چندین جمله باشند بسط داد مثلاً

$$(a-b+c)m = am - bm + cm$$

واگر بجای m مقدار $x-y$ را قرار دهیم حاصل میشود

$$(a-b+c)(x-y) = a(x-y) - b(x-y) + c(x-y)$$

$$= (ax-ay) - (bx-by) + (cx-cy) =$$

$$ax - ay - bx + by + cx - cy$$

و از آنجا قاعدهٔ کلی زیر برای ضرب چند جمله ای ها در یکدیگر بدست میآید.

۵۹ - قاعده - هر جمله از عبارت اولی را در هر جمله از عبارت دومی ضرب میکنیم و در حالیکه جمله های ضرب شدنی دارای یک علامت باشند بر حاصلضرب علامت + مقدم میسازیم و وقتی که علامت جمله ها

مختلف باشد بر حاصلضرب علامت - مقدم مینمائیم . حاصلضرب مطلوب مساوی با مجموع جبری حاصلضربهای جزئی است که بدینطریق بدست میآید

۶۰ - باید دانست که حاصلضرب $a+b$ در $x-y$ را غالباً بصورت اختصاری $(a+b)(x-y)$ مینویسند و در این عبارات مفهوم پرانتزها آنست که عبارت $a+b$ که بمنزله مقدار واحدی تصوّر شده باید در عبارت $x-y$ که آن نیز بمنزلهٔ مقدار واحد در نظر گرفته شده ضرب گردد و بنا بقاعدهٔ فوق حاصلضرب مساوی است با مجموع جبری حاصلضربهای جزئی $+ax$ و $+bx$ و $-ay$ و $-by$ که در آن علامت هر حاصلضرب را قاعدهٔ علامتها معین ساخته ایم

مثال ۱- میخواهیم عبارت $x+8$ را در عبارت $x+7$ ضرب کنیم

$$(x+8)(x+7) = x^2 + 8x + 7x + 56$$

$$= x^2 + 15x + 56$$

طریقهٔ انجام عمل بقرار زیر میباشد :

در عبارت دوم از چپ براست هر جمله را در تمام جمله های عبارت اول از چپ براست ضرب مینمائیم و حاصل ضرب یکجمله از عبارت دوم را در تمام جمله های عبارت اول در یک سطر مینویسیم جمله های هر سطر را طوری زیر یکدیگر قرار میدهیم که جمل متشابه در یک ستون واقع شوند و نتایج حاصل را با هم جمع جبری مینمائیم.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x + 7 \\ \hline x^2 + 8x \qquad\quad \\ + 7x + 56 \\ \hline x^2 + 15x + 56 \end{array}$$

جمع میکنیم

مثال ۲ - میخواهیم $2x - 3y$ را در $4x - 7y$ ضرب کنیم

$$\begin{array}{r} 2x - 3y \qquad\quad \\ 4x - 7y \qquad\quad \\ \hline 8x^2 - 12xy \qquad\quad \\ - 14xy + 21y^2 \\ \hline 8x^2 - 26xy + 21y^2 \end{array}$$

۶۱ - باید دانست که نوشتن عمل ضرب بطریق فوق مورد احتیاج قطعی نیست ولی مفید است زیرا در نتیجه اجتماع جمله های متشابه در یک ستون اشتباه کمتر پیش میآید

و بهتر آنست که مبتدیان عمل ضرب را بدین طریق انجام دهند و وقتی که قویتر شدند آنوقت عمل ضرب و جمع جمل متشابه را بطریقی که در مثال ۳ عمل میشود بنویسند

مثال ۳ - مطلوب است تعیین حاصل ضرب دو عبارت $3x^2 - 2x - 5$ و

$2x - 5$

$$(3x^2 - 2x - 5)(2x - 5) = 6x^3 - 4x^2 - 10x - 15x^2$$

$$+ 10x + 25 = 6x^3 - 19x^2 + 25$$

هرگاه بعضی از ضرائب کسری باشند در قاعدهٔ عمل ضرب تغییری حاصل نمیشود و ضرائب کسری را با قاعده ای که در حساب معمول بوده است در هم ضرب مینمائیم

مثال ۴ - مطلوبست محاسبهٔ حاصلضرب $\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}b^2$ در $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}b^2 \qquad\qquad\quad \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \qquad\qquad\qquad\quad \\ \hline \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{3}ab^2 \qquad\qquad \\ + \frac{1}{9}a^2b - \frac{1}{6}ab^2 + \frac{2}{9}b^3 \\ \hline \frac{1}{6}a^3 - \frac{5}{36}a^2b + \frac{1}{6}ab^2 + \frac{2}{9}b^3 \end{array}$$

۶۲ - برای آنکه مبتدیان بتوانند عمل ضرب را بسرعت انجام دهند میتوان ملاحظه کرد که حاصلضرب عباراتی مانند $x+8$ و $x-7$ را که در آنها جملهٔ اول هر دو عبارت یکی بوده جملهٔ دوم هر دو آنها متشابه میباشند میتوان بطریق سهلتری بدست آورد. مثالهای زیر چگونگی این عمل را معلوم میسازند.

$$(x+8)(x+7) = x^2+8x+7x+56 = x^2+15x+56$$

$$(x-8)(x-7) = x^2-8x-7x+56 = x^2-15x+56$$

$$(x+8)(x-7) = x^2+8x-7x-56 = x^2+x-56$$

$$(x-8)(x+7) = x^2-8x+7x-56 = x^2-x-56$$

از نتائج فوق معلوم میگردد که:

اولاً - در هر یک از ضربهای فوق حاصلضرب از سه جمله تشکیل یافته است

ثانیاً - جملهٔ اول مساوی حاصلضرب جمله های اول هر یک از دو عامل ضرب است

ثالثاً - جملهٔ سوم مساوی حاصل ضرب جمله های دوم هر یک از دو عامل ضرب است

رابعاً - جملهٔ وسط مساوی است با مجموع جبری جمله های دوم دو عامل ضرب در جملهٔ اول آنها. سرعت در عمل ضرب وقتی حاصل میشود که در نوشتن حاصلضرب مرحلهٔ وسطی اعمال فوق و جمع جبری حذف گردد چنانکه در مثالهای زیر مشاهده میگردد.

$$(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$$

$$(x-3)(x+4) = x^2+x-12$$

$$(x-4y)(x-10y) = x^2-14xy+40y^2$$

با اندک تأملی میتوان قاعدهٔ فوق را در مورد ضرب دو جمله ای های مشکلتر نیز تعمیم داد چنانکه در مثالهای زیر دیده میشود:

$$(2x+3y)(x-y) = 2x^2-2xy+3xy-3y^2 = 2x^2+xy-3y^2$$

$$(3x-4y)(2x+y) = 6x^2-8xy+3xy-4y^2 = 6x^2-5xy-4y^2$$

مسائل و تمرینات

حاصل ضرب عبارتهای زیر را بدست آورید:

۱۷۲ - $x+10$ و $x+5$

۱۷۳ - $x-7$ و $x-10$

۱۷۴ - $x+7$ و $x-10$

۱۷۵ - $x+6$ و $x-6$

۱۷۶ - $x-12$ و $x-1$

۱۷۷ - $x+12$ و $x-1$

۱۷۸ - $x-15$ و $-x+3$

۱۷۹ - $-x+7$ و $x-7$

۱۸۰ - $x-13$ و $x+14$

۱۸۱ - $x+19$ و $x-20$

۱۸۲ - $-x+21$ و $x-21$

۱۸۳ - $2x+3$ و $x-8$

۱۸۴ - $2x-5$ و $x-1$

۱۸۵ - $3x+5$ و $2x-7$

۱۸۶- $2x-3$ و $5x+6$ ۱۸۷- $3x-5y$ و $3x-5y$

۱۸۸- $a+8b$ و $a-7b$ ۱۸۹- $a+ab$ و $a-9b$

۱۹۰- $x-a$ و $x+b$ ۱۹۱- $ax-by$ و $ax+by$

۱۹۲- $2pq-3r$ و $2pq+3r$ ۱۹۳- $a-2b+c$ و $a+2b-c$

۱۹۴- x^2+3y^2 و $x+2y$ ۱۹۵- $x^4-x^2y^2+y^4$ و x^2+y^2

۱۹۶- x^2+xy+y^2 و $x-y$

۱۹۷- $a^2-2ax+4x^2$ و $a^2+2ax+4x^2$

۱۹۸- $16a^2+12ab+9b^2$ و $4a-3b$

۱۹۹- $a^2x-ax^2+x^3-a^3$ و $x+a$

۲۰۰- x^2+x-2 و x^2+x-6

۲۰۱- $2x^3-3x^2+2x$ و $2x^2+3x+2$

۲۰۲- $-a^5+a^4b-a^2b^2$ و $-a-b$ ۲۰۳- x^2-7x+5 و x^2-2x+3

۲۰۴- $a^3+2a^2b+2ab^2$ و $a^2-2ab+2b^2$

۲۰۵- $4x^2+6xy+9y^2$ و $2x-3y$ ۲۰۶- $-x^2+xy+y^2$ و $x^2-2yx-y^2$

۲۰۷- $b^3-a^2b^2+a^3$ و $a^3+a^2b^2+b^3$

۲۰۸- $2xz-z^2+2x^2-2yz+xy$ و $x-y+2z$

۲۰۹- $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}$

۲۱۰- $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

۲۱۱- $\frac{2}{3}x^2+xy+\frac{3}{2}y^2$ و $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y$

حاصل ضربهای زیر را بقاعدهٔ شمارهٔ ۶۲ بدست آورید

۲۱۲- $(x-5)(x+8)$ ۲۱۳- $(x+10)(x-3)$

۲۱۴- $(x-9)(x+7)$ ۲۱۵- $(x+11)(x-4)$

۲۱۶- $(x-2)(x+3)$ ۲۱۷- $(a-5)(a+9)$

۲۱۸- $(a+4)(a-8)$ ۲۱۹- $(a+3)(a+3)$

۲۲۰- $(a-8)(a-8)$ ۲۲۱- $(x-5a)(x+6a)$

۲۲۲- $(x-2y)(x+4y)$ ۲۲۳- $(x-3y)(x-3y)$

۲۲۴- $(a+10b)(a-5b)$ ۲۲۵- $(x+2)(2x-5)$

۲۲۶- $(3x-5)(2x-5)$ ۲۲۷- $(3x+y)(3x-2y)$

۲۲۸- $(3x+2y)(3x+2y)$ ۲۲۹- $(5x-2a)(5x+2a)$

۲۳۰- $(2x+a)(2x+a)$ ۲۳۱- $(9a-3b)(9a-3b)$

فصل ششم ـ تقسیم

۶۳ ـ مقصود از تقسیم عدد a (مقسوم) بر عدد b (مقسومٌ علیه) بدست آوردن عددی است بنام خارج قسمت که چون آنرا در b ضرب کنیم عدد a حاصل شود. عمل تقسیم a بر b با هریک از علامتهای $a : b$ یا $\frac{a}{b}$ یا a/b نمایش داده میشود

بنابراین تعریف عمل تقسیم عکس عمل ضرب است زیرا $a = b \times (a : b)$

ویا مقسوم = مقسومٌ علیه × خارج قسمت

۶۴ ـ از تساویهای زیر بیان قاعدهٔ علامتها در مورد تقسیم معلوم میگردد:

$$ab : a = \frac{ab}{a} = \frac{a \times b}{a} = b$$

$$-ab : +a = \frac{-ab}{+a} = \frac{a \times (-b)}{a} = -b$$

$$ab : (-a) = \frac{ab}{-a} = \frac{(-a) \times (-b)}{-a} = -b$$

$$-ab : (-a) = \frac{-ab}{-a} = \frac{(-a) \times b}{-a} = b$$

و از اینجا معلوم میشود که در عمل تقسیم نیز مانند عمل ضرب:

علامتهای هم جنس علامت + و علامتهای مختلف علامت − پدید میآورند.

۶۵ ـ تقسیم عبارات ساده بر یکدیگر ـ قاعدهٔ تقسیم از مثالهای زیر معلوم میشود

مثال ۱ ـ چون حاصل ضرب عدد ۴ در عدد x عبارتست از $4x$ پس اگر $4x$ را بر ۴ تقسیم کنیم عدد x حاصل میشود و اگر آنرا بر x تقسیم کنیم ۴ حاصل میشود:

$$\frac{4x}{4} = 4x : 4 = x \quad \text{و} \quad 4x : x = \frac{4x}{x} = 4$$

مثال ۲ ـ $27a^5$ را بر $9a^3$ تقسیم نمایید

از مقسوم و مقسومٌ علیه عواملی را که در هر دو مشترک اند حذف مینمائیم. این کار در حساب نیز معمول میباشد.

$$\frac{27a^5}{9a^3} = \frac{27aaaaa}{9aaa} = 3aa = 3a^2$$

پس

$$27a^5 : 9a^3 = 3a^2$$

مثال ۳ ـ $35a^3b^2c^3$ را بر $7ab^2c^2$ تقسیم نمایید.

$$\text{خارج قسمت} = \frac{35aaa.bb.ccc}{7a.bb.cc} = 5aa.c = 5a^2c$$

چنانکه ملاحظه میشود نمای هر حرف در خارج قسمت مساوی است با تفاضل نماهای همین حرف در مقسوم و مقسومٌ علیه و از آنجا قاعدهٔ کلی زیر بدست میآید

۶۶ ـ قاعده ـ نمای هر حرف در خارج قسمت تقسیم دو مقدار مساویست با تفاضل نمای همان حرف در مقسوم و در مقسومٌ علیه و ضریب عددی خارج

قسمت مساویست با حاصل تقسیم ضرائب عددی مقسوم و مقسوم علیه (با رعایت علامت)

مثال ۴ - میخواهیم عبارت $45a^6b^2x^4$ را بر $-9a^3bx^2$ تقسیم نمائیم:

خارج قسمت $=(-5)\times a^{6-3}b^{2-1}x^{4-2}=-5a^3bx^2$

مثال ۵ - $-21a^2b^3:(-7a^2b^2)=3b$

۶۷ - در حالتی که مقسوم شامل تمام عوامل مقسوم علیه نباشد یا بعضی از عوامل مزبور را با نمای کوچکتری شامل باشد خارج قسمت بصورت کسری نوشته میشود

مثال ۶ - $\frac{12x^3y^3b}{18xy^2b^2}=\frac{2\times6\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times b}{3\times6\times x\times y\times y\times b\times b}=\frac{2xy}{3b}$

مثال ۷ - $\frac{4x^2y}{2xy^2}=\frac{2xy\cdot2x}{2xy\cdot y}=\frac{2x}{y}$

۶۷ - تبصره - هرگاه قاعدهٔ شمارهٔ ۶۶ را در مورد تقسیم یکی از قوای یک حرف برهمان قوهٔ از همان حرف بکار بریم نتیجهٔ مهم زیر بدست میآید:

$a^3:a^3=a^{3-3}=a^0$

و از طرف دیگر میدانیم $a^3:a^3=\frac{a^3}{a^3}=1$

پس $a^0=1$

یعنی هر عدد را بقوهٔ صفر برسانیم حاصل مساوی واحد میباشد

۶۸ - تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای - قاعده - برای تقسیم یک چند جمله ای بر عبارت یک جمله ای کافی است هر یک از جمله های عبارت مزبور را بر جملهٔ مقسوم علیه تقسیم کرده مجموع جبری خارج قسمتهای حاصل را بدست آوریم تا خارج قسمت تقسیم بدست آید

واضح است که هرگاه در یکی از تقسیمات جزء مقسوم شامل بعضی از عوامل مقسوم علیه با نمای کوچکتر باشد حاصل آن تقسیم جزء بصورت کسری نوشته میشود

چند مثال -

$(9x-12y+3z):-3=-3x+4y-z$

$(36a^3b^2-24a^2b^5-20a^4b^2):4a^2b=9ab-6b^4-5a^2b$

$(2x^2-5xy+\frac{3}{2}x^2y^3):\frac{-1}{2}x=-4x+10y-3xy^3$

$(x^2y+x^2+xy^2):-xy=-x-\frac{x}{y}-y$

تمرینات

۲۳۲ - $-35x^6$ بر $+7x^3$ ۲۳۳ - $-abx^2$ بر $-a^2x$

۲۳۴ - $+a^4x^3$ بر $-a^2x^3$ ۲۳۵ - $12a^6b^6c^6$ بر $-3a^4b^2c$

۲۳۶ - $-a^5c^9$ بر $-ac^3$ ۲۳۷ - $16x^3y^2$ بر $-4xy^2$

ثالثاً - تمام جمله های مقسومٌ علیه را در خارج قسمت جزء مزبور ضرب کرده حاصل را در زیر جمل مقسوم مینویسیم

رابعاً - حاصل مزبور را از مقسوم کم میکنیم تا اولین باقیمانده بدست آید

خامساً - جملهٔ سمت چپ باقیمانده را بر جملهٔ سمت چپ مقسومٌ علیه تقسیم کرده دومین خارج قسمت جزء را تشکیل میدهیم و مجدداً این خارج قسمت جزء را در تمام جمله های مقسومٌ علیه ضرب کرده حاصل را از باقیماندهٔ اولی کم می کنیم تا باقیماندهٔ دوم بدست آید

سادساً - عمل را بهمین طریق ادامه میدهیم تا آنکه تمام جمله های مقسوم بکار روند و در نتیجه یا آخرین باقیمانده صفر است و یا به باقیمانده ای میرسیم که درجهٔ آن از درجهٔ مقسومٌ علیه کوچکتر میباشد

واضح است که میتوان این باقیماندهٔ آخرین را نیز بر مقسومٌ علیه تقسیم کرد در این صورت آخرین خارج قسمت بصورت کسر خواهد بود

مثال ۱ - مطلوب است تقسیم $x^2+11x+30$ بر $x+6$ طبق قاعدهٔ فوق عمل مینمائیم .

وصورت عمل چنین نوشته میشود :

۲۳۸ - $35a^{11}$ بر $7a^7$ ۲۳۹ - a^3bc بر $-7a^2bc$

۲۴۰ - $16b^2yx^2$ بر $-2xy$ ۲۴۱ - $16byx^2$ بر $-2xy$

۲۴۲ - $-14abcx^7$ بر $-21a^2bcx^8$

۲۴۳ - x^2-2xy بر x ۲۴۴ - $x^6-7x^5+4x^4$ بر x^2

۲۴۵ - $15x^5-25x^4$ بر $-5x^3$ ۲۴۶ - $-24x^4-32x^6$ بر $9x^5$

۲۴۷ - $a^2-ab-ac$ بر $-a$ ۲۴۸ - $3x^3-9x^2y-12xy^2$ بر $-3x$

۲۴۹ - $-3a^2+\frac{9}{2}ab-6ac$ بر $-\frac{3}{2}a$

۲۵۰ - $-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{3}xy+\frac{11}{3}x$ بر $-\frac{5}{6}x$

۲۵۱ - $\frac{1}{4}a^2x-\frac{1}{16}abx-\frac{3}{8}acx$ بر ax

۲۵۲ - $-5x^2y^2+10xay^2-25ax^2y^2$ بر $10axy^2$

تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای

۶۹ - برای تقسیم یک چند جمله ای بر چند جمله ای دیگر قاعدهٔ زیر را بکار میبریم .

قاعده - اولاً عبارت مقسوم و عبارت مقسومٌ علیه را نسبت بقوای صعودی یا قوای نزولی یکی یا بعضی از حروف مشترک مرتب مینمائیم

ثانیاً - جملهٔ سمت چپ مقسوم را بر جملهٔ سمت چپ مقسوم علیه تقسیم کرده اولین خارج قسمت جزء را بدست میآوریم .

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 11x + 30 & x+6 \\ \cline{2-2} & x+5 \end{array}$$

تفریق میکنیم $\quad x^2 + 6x$

$$\overline{\quad 5x + 30 \quad}$$

تفریق می کنیم $\quad 5x + 30$

$$\overline{\quad 0 \quad}$$

دلیل قاعدهٔ فوق را میتوان اینطور بیان کرد : برای تقسیم مقسوم بر مقسومٌ علیه باید مقسوم را بیک عده اجزائی تقسیم کنیم که هر یک از آنها بر مقسومٌ علیه قابل قسمت باشند و در اینصورت خارج قسمت اصلی مساوی با مجموع جبری خارج قسمتهای جزء میباشد : بنابراین عبارت $x^2 + 11x + 30$ را بدو جزء تقسیم کردیم یکی $x^2 + 6x$ و یکی $5x + 30$ که حاصل تقسیم اولی بر $x + 6$ مساوی x و از آن دومی 5 است و بنابراین خارج قسمت اصلی $x + 5$ میباشد

۷۰ - میتوان پس از ضرب هر خارج قسمت جزء در مقسومٌ علیه علامت حاصل ضربها را تغییر داده آنها را در زیر مقسوم نوشت و حاصل را جمع جبری نمود و در بسیاری از موارد میتوان این جمع جبری را در ذهن انجام داد و در اینصورت عمل تقسیم را باختصار مینامند (مبتدیان از اینکار خودداری نمایند)

اگر بعضی از ضرائب کسری باشند عمل تقسیم ضرائب بر یکدیگر مثل معمول و طبق قواعدی

که در حساب دیده ایم بعمل میآید مثالهای زیر چگونگی این اعمال را روشن مینمایند

مثال ۲ - میخواهیم $24x^2 - 65xy + 21y^2$ را بر $8x - 3y$ تقسیم کنیم

$$\begin{array}{l|l} 24x^2 - 65xy + 21y^2 & 8x - 3y \\ \cline{2-2} & 3x - 7y \end{array}$$

جمع می کنیم $\quad -24x^2 + 9xy$

$$\overline{\quad -56xy + 21y^2 \quad}$$

$+56xy - 21y^2$

جمع می کنیم

$$\overline{\quad 0 + 0 \quad}$$

مثال ۳ - میخواهیم $6x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x - 13$ را بر $2x^2 - x + 3$ تقسیم کنیم

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x - 13 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} & 3x^3 + x^2 - 2x - 5 \end{array}$$

جمع میکنیم $\quad -6x^5 + 3x^4 - 9x^3$

$$\overline{\quad 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 \quad}$$

جمع می کنیم $\quad -2x^4 + x^3 - 3x^2$

$$\overline{\quad -4x^3 - 8x^2 - x \quad}$$

جمع می کنیم $\quad +4x^3 - 2x^2 + 6x$

$$\overline{\quad -10x^2 + 5x - 13 \quad}$$

جمع می کنیم $\quad +10x^2 - 5x + 15$

$$\overline{\quad 2 \quad}$$

در این تقسیم $3x^3 + x^2 - 2x - 5$ خارج قسمت صحیح و 2 باقیمانده است و اگر آنرا نیز بر مقسومٌ علیه تقسیم کنیم خارج قسمت کسری بدست میآید.

مثال ۴ - میخواهیم $\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{72}xy^2+\frac{1}{12}y^3$ را بر $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ تقسیم نمائیم

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{4}x^3+\frac{1}{72}xy^2+\frac{1}{12}y^3 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y \\ \hline -\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{6}x^2y & \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2 \\ \quad -\frac{1}{6}x^2y+\frac{1}{72}xy^2 & \\ \quad +\frac{1}{6}x^2y+\frac{1}{9}xy^2 & \\ \qquad \frac{1}{8}xy^2+\frac{1}{12}y^3 & \\ \qquad -\frac{1}{8}xy^2-\frac{1}{12}y^3 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

تمرینات

اعمال تقسیم زیر را انجام دهید و خارج قسمتهای صحیح را بدست آورید

۲۵۳ - x^2+3x+2 بر $x+1$

۲۵۴ - $a^2-11a+30$ بر $a-5$

۲۵۵ - $3x^2+10x+3$ بر $x+3$

۲۵۶ - $5x^2+11x+2$ بر $x+2$

۲۵۷ - $5x^2+16x+3$ بر $x+3$

۲۵۸ - $4x^2+23x+15$ بر $4x+3$

۲۵۹ - $3x^2+x-14$ بر $x-2$

۲۶۰ - $6x^2-31x+35$ بر $2x-7$

۲۶۱ - $4x^2+x-14$ بر $x+2$

۲۶۲ - $15a^2+17ax-4x^2$ بر $3a+4x$

۲۶۳ - $9a^2+6ac-35c^2$ بر $3a+7c$

۲۶۴ - $96x^2-15y^2-4xy$ بر $12x-5y$

۲۶۵ - $7x^3+96x^2-28x$ بر $7x-2$

۲۶۶ - $27x^3+9x^2-3x-10$ بر $3x-2$

۲۶۷ - $15+3a-7a^2-4a^3$ بر $5-4a$

۲۶۸ - $16-96x+216x^2-216x^3+81x^4$ بر $2-3x$

۲۶۹ - x^4+4a^4 بر $x^2+2ax+2a^2$

۲۷۰ - $a^3+b^3+c^3-3abc$ بر $a+b+c$

۲۷۱ - a^9-b^9 بر a^3-b^3

~~۲۷۲ - $a^{12}+2a^6b^6+b^{12}$ بر $a^4+2a^2b^2+b^4$~~

۲۷۳ - $1-a^3-8x^3-6ax$ بر $1-a-2x$

۲۷۴ - $\frac{1}{8}a^3-\frac{9}{4}a^2x+\frac{27}{2}ax^2-27x^3$ بر $\frac{1}{2}a-3x$

۲۷۵ - $\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{16}a-\frac{1}{64}$ بر $\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}$

فصل هفتم

اختصار عبارات - برداشتن و گذاردن پرانتز

۷۱ - میدانیم که هرگاه عبارتی را در داخل پرانتز قرار دهند منظور آنست که با تمام جمله های آن عبارت باید عمل واحدی را انجام داد و این عمل بوسیلهٔ علامتی که قبل از پرانتز یا بعد از آن قرار دارد معلوم میشود مثلاً در عبارت $2a-3b-(4a-2b)$ پرانتز چنین نشان میدهد که عبارت $4a-2b$ را بمنزلهٔ مقدار واحدی در نظر گرفته شده باید از $2a-3b$ کم کرد هرگاه بخواهند قسمتی از عبارتی را که در داخل یک پرانتز قرار دارد در داخل پرانتز دیگری قرار دهند معمولاً پرانتزهائی باشکال مختلف بکار میبرند. متداولترین انواع پرانتز عبارتست از ( ) که همان پرانتز نامیده میشود و [ ] که کروشه نامیده میشود و { } که به آکولاد معروفست

برداشتن پرانتز

۷۲ - برای برداشتن پرانتزها از یک عبارت باید ابتدا از داخل پرانتزها شروع کرد و بعد از خلاصه کردن هر پرانتز مقدار داخل پرانتزی را که بر آن محیط میباشد خلاصه نمود و برای هر پرانتز همان قاعده هائی را که در شماره های (۳۵) و (۳۶) گفتیم بکار میبرند و بعد از برداشتن هر پرانتز و ترکیب آن با عبارات ما بعد یا ما قبل جمل مشابه را

خلاصه مینمایند

مثال - میخواهیم عبارت زیر را خلاصه کنیم

$$a-2b-\{4a-6b-[3a-c+(5a-2b)-(3a-c+2b)]\}$$

پرانتزها را یک بیک برداشته عبارت مفروض را مرتباً بصورتهای زیر مینویسیم

$$a-2b-\{4a-6b-[3a-c+(5a-2b)-(3a-c+2b)]\}$$

$$=a-2b-\{4a-6b-[3a-c+5a-2b-3a+c-2b]\}$$

$$=a-2b-\{4a-6b-[5a-4b]\}=$$

$$a-2b-\{4a-6b-5a+4b\}=$$

$$a-2b-\{-a-2b\}=a-2b+a+2b=2a$$

۷۳ - هرگاه ضریبی مقابل یک پرانتز قرار گیرد دلیل است بر اینکه باید تمام جمله های عبارتی که در داخل پرانتز واقع میباشند در ضریب مزبور ضرب شوند

۷۴ - تبصره - گاهی خط کسری نیز عمل پرانتز را انجام میدهد مثلاً عبارت $\frac{x-5}{3}$ با عبارت $\frac{1}{3}(x-5)$ معادل است یعنی باید مقادیر صورت (یا داخل پرانتز) همگی در $\frac{1}{3}$ ضرب شوند

علامت رادیکال نیز همان مفهوم پرانتز را میرساند یعنی مثلاً $\sqrt{x+y}$ چنین نشان

میدهد که باید از مقدار x بعلاوه y که بمنزلهٔ مقدار واحدی در نظر گرفته میشوند جذر گرفت

بنابراین مثلاً $\sqrt{۲۵+۱۴۴} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$ میباشد

و با $\sqrt{۲۵} + \sqrt{۱۴۴} = ۵ + ۱۲ = ۱۷$ تفاوت دارد

مثال ـ عبارت زیر را خلاصه کنید

$$۸۴ - ۷\{-۱۱x - ۴[-۱۷x + ۳(۸ - ۹ + ۵x)]\}$$

عبارت مفروض را مرتباً بصورتهای زیر مینویسیم

$$۸۴ - ۷\{-۱۱x - ۴[-۱۷x + ۳(-۱ + ۵x)]\} =$$

$$۸۴ - ۷\{-۱۱x - ۴[-۱۷x - ۳ + ۱۵x]\} =$$

$$۸۴ - ۷\{-۱۱x - ۴[-۲x - ۳]\} =$$

$$۸۴ - ۷\{-۱۱x + ۸x + ۱۲\} =$$

$$۸۴ - ۷\{۱۲ - ۳x\} = ۸۴ - ۸۴ + ۲۱x = ۲۱x$$

تمرینات

عبارات زیر را خلاصه نمائید

۲۷۶ - $a - (b - c) + (b - c) + a + b - (c + a)$

۲۷۷ - $a - [b + \{a - (b + a)\}]$

۲۷۸ - $[a - (b - c)] + [b - (c - a)] - [c - (a - b)]$

۲۷۹ - $-\{-[-(a - b + c)]\}$

۲۸۰ - $۲a - [۵b + (۲c - a)] - [۵a - (b + c)]$

۲۸۱ - $-\{-۲x - [۳y - (۲x - ۳y) + (۳x - ۲y)] + ۲x\}$

۲۸۲ - $۵[۲x - ۳(x + ۲y)]$

۲۸۳ - $۲x[a + b - ۲(a + b) + ۲a]$

۲۸۴ - $۳a^۲ - [۴a^۲ - \{۸b^۲ - (۹c^۲ - ۲a^۲)\}]$

گذاردن پرانتز

۷۵ ـ عمل عکس برداشتن پرانتزها را در شماره های **فصل سوم** گفتیم و در این مورد برای آنکه تمام مطالب مربوط به پرانتزها را در یک مبحث ذکر کرده باشیم تبکرار آن میپردازیم

اولاً ـ میتوان هر قسمت دلخواه از یک عبارت را در داخل پرانتزی قرار داده و بر پرانتز علامت + مقدم ساخت و هیچگونه تغییری از لحاظ علامت در جمله های عبارت مزبور داد

ثانیاً ـ هر قسمت از یک عبارت را میتوان در داخل پرانتزی قرار داده علامت − بر پرانتز مقدم ساخت بشرط آنکه علامت تمام جمله های داخل پرانتز را تغییر داد

مثال ـ $a - b + c - d - e = (a - b) + (c - d - e)$

و نیز $a-b+c-d-e = a-(b-c)-(d+e)$

و $x^2-ax+bx-ab = (x^2-ax)+(bx-ab)$

۷۶ ـ جمله های یک عبارت را میتوان باقسام مختلف در داخل پرانتز قرار داد :

مثال ـ $ax-bx+cx-ay+by-cy =$

$(ax-bx)+(cx-ay)+(by-cy) =$

$(ax-bx+cx)-(ay-by+cy) =$

$(ax-ay)-(bx-by)+(cx-cy)$

۷۷ ـ همانطور که هرگاه عددی مقابل یک پرانتز نوشته شده باشد باید آنرا در تمام جمله های داخل پرانتز ضرب نمود بالعکس اگر عاملی در تمام جمله های عبارتی که در داخل یک پرانتز واقع است مشترک باشد میتوان آن عامل را خارج کرده بصورت مضروب فیه مشترکی برای تمام جمله های عبارت مزبور مقابل پرانتز نوشت

مثال ۱ ـ میخواهیم در عبارت $ax^3-cx+7-dx^2+bx-c-dx^3+bx^2-2x$ قوای متشابه x را در داخل یک پرانتز جمع نمائیم بطوریکه مقابل هر پرانتز علامت + قرار گیرد:

عبارت مفروض $= (ax^3-dx^3)+(bx^2-dx^2)+(bx-cx-2x)$

$+(7-c) = x^3(a-d)+x^2(b-d)+x(b-c-2)$

$+(7-c) = (a-d)x^3+(b-d)x^2+(b-c-2)x+7-c$

در چنین مواردی مقادیر $a-d$ و $b-d$ و $b-c-2$ را بترتیب ضریب x^3 و x^2 و x مینامند .

مثال ۲ ـ میخواهیم در عبارت $-a^2x-7a+a^2y+3-2x-ab$ قوای متشابه a را در داخل یک پرانتز قرار دهیم بطوریکه بر هر پرانتز علامت ـ مقدم باشد

عبارت مفروض $= -(a^2x-a^2y)-(7a+ab)-(2x-3)$

$= -a^2(x-y)-a(7+b)-(2x-3)$

$= -(x-y)a^2-(7+b)a-(2x-3)$

۷۸ ـ در غالب موارد وقتی عباراتی را باهم جمع میکنیم و یا در یکدیگر ضرب مینمائیم و جمله های عبارات مزبور دارای ضرائب حرفی میباشند بهتر آنست که جمله ها را برحسب قوای بعضی از حروف مشترک مرتب نمائیم

مسائل و تمرینات

در هریک از عبارات زیر قوای متشابه x را در یک پرانتز قرار دهید بطوریکه علامت هر پرانتز + باشد .

۲۸۵ ـ $ax^4+bx^2+5+2bx-5x^2+2x^3-3x$

۲۸۶ - $2bx^2 - 7 - 2x + ab + 5ax^3 + cx - 4x^2 - bx^3$

۲۸۷ - $2 - 7x^3 + 5ax^2 - 2cx + 9ax^3 + 7x - 3x^2$

در هر یک از عبارات زیر قوای متشابه x را در یک پرانتز قرار دهید بطوریکه علامت مقابل هر پرانتز + باشد

۲۸۸ - $ax^2 + 5x^3 - a^2x^4 - 2bx^3 - 3x^2 - bx^4$

۲۸۹ - $ax^2 + a^2x^3 - bx^2 - 5x^3 - cx^3$

۲۹۰ - $3b^2x^4 - bx - ax^4 - cx^4 - 5c^2x - 7x^4$

هر یک از عبارات زیر را خلاصه کرده و هر نتیجه را مجدداً نسبت بقوای نزولی x مرتب نمائید

۲۹۱ - $ax^3 - 2cx - [bx^2 - \{cx - dx - (bx^2 + 3cx^2)\} - (cx^2 - bx)]$

۲۹۲ - $5ax^3 - 7(bx - cx^2) - \{+bx^2 - (3ax^2 + 2ax) - 4cx^3\}$

۲۹۳ - $ax^3 - 3\{-ax^3 + 3bx - 4[\frac{1}{5}cx^3 - \frac{1}{2}(ax - bx^2)]\}$

هر دسته از عبارات زیر را باهم جمع کرده نتیجه های حاصل را برحسب قوای x مرتب نمائید.

۲۹۴ - $ax^3 - 2cx$ و $bx^2 - cx^3$ و $cx^2 - x$

۲۹۵ - $a^2x^3 - 5x$ و $2ax^2 - 5ax^3$ و $2x^3 - bx^2 - ax$

۲۹۶ - $ax^2 + bx + c$ و $qx - z - px^2$ و $x^2 + 2x + 3$

عبارتهای زیر را درهم ضرب کرده و نتایج حاصل را نسبت بقوای x مرتب نمائید

۲۹۷ - $ax^2 + bx + 1$ در $cx + 3$

۲۹۸ - $cx^2 - 2x + 3$ در $ax - b$

۲۹۹ - $2x^2 - 3x - 1$ در $bx + c$

۳۰۰ - $px^3 - 2x - q$ در $ax - 3$

۳۰۱ - $x^3 + ax^2 - bx - c$ در $x^3 - ax^2 - bx + c$

فصل هشتم

معادلات جبری

۷۹ - وقتی که مقدار عددی دو عبارت جبری بازاء تمام یا بعضی از مقادیری که بحروف نسبت داده میشود یکی باشد میگویند این دو عبارت یک تساوی جبری بوجود میآورند مثلاً $2x + 7 = 4 + x + 3 + x$ یک تساوی جبری است که بازاء هر مقدار عددی که به x نسبت داده شود صحیح است ولی $4x + 2 = 14$ یک تساوی جبری است که فقط بازاء $x = 3$ برقرار میباشد و اگر غیر از ۳ عدد دیگری به x نسبت دهیم تساوی برقرار نیست یعنی $4x + 2$ مساوی با ۱۴ نمیشود.

هر یک از دو عبارت مزبور را که در طرفین علامت = نوشته میشوند یک طرف تساوی یا یک عضو تساوی مینامند و معمولاً عضو سمت چپ را طرف اول تساوی، عضو سمت راست را طرف دوم تساوی گویند.

۸۰ - وقتی در یک تساوی جبری مقدار عددی دو طرف بازاء تمام مقادیر عددیکه بحروف داده شود یکی شد دلیل بر آن است که آن دو طرف عین یکدیگر هستند اگر

ظاهراً یکی بنظر نمیآیند برای آنست که خلاصه نشده اند و پس از خلاصه کردن هردو بیک عبارت تبدیل میشوند

این نوع تساویهارا اتحاد جبری مینامند و تساوی $x+3+x+4=2x+7$ از این قبیل است و ملاحظه میشود که اگر در طرف اوّل جمله های متشابه را باهم جمع کنیم دو طرف یکی میشوند. معمولاً در اتحادها بجای علامت تساوی (=) علامت (≡) میگذارند و چنین میخوانند: عبارت طرف اوّل (متحد است با) عبارت طرف دوّم

۸۱ - تساویهای جبری راکه بازاء بعضی از مقادیر حروف برقرارند (یعنی مقدار عددی دوطرف آنها یکی میشود) معادلهٔ جبری یا باختصار معادله میگویند پس تساوی $4x+2=14$ یک معادله است که بازاء $x=3$ فقط برقرار میباشد و تساوی $x^2+x-2=0$ نیز یک معادله است که فقط بازاء $x=1$ و $x=-2$ برقرار میباشد.

وقتی طرفین یک معادله بازاء یک یا چند مقدار از حروف باهم یکی شدند میگویند آن مقدار یا آن مقدارها در معادله صدق مینمایند و آنهارا ریشه های معادله گویند.

پس $x=3$ ریشهٔ معادلهٔ $4x+2=14$ است و در معادله صدق مینماید.

و اعداد ۱ و ۲- ریشه های معادلهٔ $x^2+x-2=0$ هستند و در معادله صدق میکنند.

ریشه های معادله را گاهی جوابهای معادله نیز میگویند.

حرف یا حروفی را که باید ریشهٔ معادله را بجای آن گذارد تا دوطرف مساوی شوند مجهول معادله مینامند پس در معادله های بالا فقط x مجهول است و عددهای موجود در معادله معلوم نامیده میشوند

۸۲ - میگویند دو معادله متعادل هستند وقتی که ریشهٔ هردو آنها یکی باشد.

مثلاً دو معادلهٔ $x-2=3$ و $2x+7=17$ متعادلند زیرا ریشه هردو آنها ۵ است و معادلهٔ $x-1=2x$ با معادلهٔ $x+1=0$ معادلست زیرا ریشهٔ هر کدام آنها ۱- است.

۸۳ - معادلهٔ حرفی - معادلهٔ $x+a=2$ دو مجهول دارد یکی x است و دیگری a و بازاء بسیاری از مقادیر عددی که باین حرفها نسبت دهیم دو طرف یکی میشوند مانند $x=1$ و $a=1$ و $x=2$ و $a=0$ وغیره امّا در بسیاری از معادله ها اینطور قرار میگذارند که بعضی از حرفهارا مجهول و باقی را معلوم فرض کنند مثلاً در معادلهٔ بالا اگر x را مجهول و a را معلوم اختیار نمائیم ریشهٔ معادله

عبارت میشود از $x = 2 - a$ یعنی ریشهٔ معادله یک عدد نیست بلکه یک عبارت جبری است که شامل حرف a میباشد این قبیل معادله ها را معادلهٔ حرفی مینامند و واضح است که این معادله ها ریشه های متعدد دارند زیرا اگر به a اعداد مختلف نسبت دهیم برای x مقدار های مختلف بدست میآید

۸۴ - درجهٔ یک معادله - درجهٔ هر معادله عبارتست از بزرگترین قوه ای از مجهول که در آن معادله وجود دارد پس معادلهٔ $4x + 2 = 14$ معادلهٔ درجهٔ اوّل و معادلهٔ $x^2 + x - 2 = 0$ معادلهٔ درجهٔ دوّم است

پس معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول معادله ایست که فقط یک مجهول داشته باشد و در آن معادله بعد از اختصار عبارات دو طرف فقط جمله های درجه اول از مجهول وجود داشته باشند . .

پس معادلهٔ $4x + 2 = 14$ معادلهٔ یک مجهولی درجه اول است ولی معادله $x^2 + x - 2 = 0$ یک مجهولی درجهٔ دوّم است

۸۵ - حلّ معادله - مقصود از حل هر معادله بدست آوردن ریشه یا ریشه های آنست در این کتاب ما فقط راه حل معادله های درجه اول یک مجهولی را میگوئیم راه حل معادله های یک مجهولی درجهٔ اول آنست که آنها را بتدریج بمعادله های ساده تری

تبدیل کنیم تا عاقبت معادله تبدیل بتساوی ما بین مجهول و ریشه گردد و برای اینکار از اصلهای زیر که در حلّ انواع معادلات مفیدند استفاده می کنیم

۸۶ - اصل اوّل - هرگاه بر دو مقدار متساوی دو مقدار متساوی اضافه کنیم یا از دو مقدار متساوی دو مقدار متساوی را کم نمائیم حاصل دو مقدار متساوی خواهد بود .

مورد استفاده - در معادلهٔ $x - 2 = 10$ بر هر دو طرف معادله ۲ واحد اضافه می کنیم حاصل میشود $x - 2 + 2 = 10 + 2$

و یا $x = 12$

و نیز در معادلهٔ $x + 9 = -5$ از هر دو طرف تساوی ۹ واحد کم می کنیم تا حاصل شود — $x + 9 - 9 = -5 - 9$

و یا $x = -14$

از این اصل دو نتیجهٔ مهم زیر بدست میآید

اوّلاً - میتوان عبارتی را از یکطرف تساوی بطرف دیگر آن انتقال داد بشرط آنکه بعد از این انتقال علامت آن را تغییر داد

زیرا در حقیقت مثل اینست که آن عبارت را از هر دو طرف معادله کم کرده باشیم مثلاً در معادلهٔ $2x - 3 = x$ میتوانیم x را از طرف دوّم بطرف اوّل

انتقال دهیم و حاصل میشود $2x - 3 - x = 0$ و سپس ۳- را از طرف اوّل بطرف دوّم انتقال میدهیم تا حاصل شود $2x - x = 3$ و یا $x = 3$

ثانیاً - میتوان دو مقدار متساوی و متحد العلامت را از دو طرف معادله حذف کرد

یعنی باز هم در واقع این مقدار را از هر دو طرف کم کرد

مثلاً در معادلهٔ حرفی $3a - x = 3a - 2x + a$ میتوان $3a$- را از دو طرف حذف نمود تا حاصل شود $x = 2x + a$ و بعد از هر دو طرف x را کاست تا نتیجه شود $a + x = 0$ و بالاُخره a را بنا بر نتیجهٔ اوّل بطرف دوّم انتقال داد و حاصل میشود $x = -a$

۸۷- اصل دوّم - هرگاه دو مقدار متساوی را در دو مقدار متساوی ضرب کنیم یا دو مقدار متساوی را بر دو مقدار متساوی تقسیم نمائیم حاصل باز هم دو مقدار متساوی خواهد بود

از اینجا معلوم میشود که میتوان دو طرف یک معادله را در یک عدد جبری ضرب کرد و یا بر یک عدد جبری غیر از صفر تقسیم نمود و حاصل معادله ای هم ارز با معادلهٔ

مفروض خواهد بود

مورد استفاده - در معادلهٔ حرفی $\frac{x}{2a} = 3$ دو طرف معادله را در $2a$ ضرب می کنیم تا حاصل شود $\frac{2ax}{2a} = 3 \times 2a$ و یا $x = 6a$

و در معادلهٔ $3x = 27$ اگر دو طرف معادله را بر ۳ تقسیم کنیم حاصل میشود

$$x = 9$$

تمرینات

معادله های زیر را حل کنید

۳۰۲- $3x = 18$

۳۰۳- $6x = 12$

۳۰۴- $7x = -7$

۳۰۵- $3x = 21$

۳۰۶- $13x = 39$

۳۰۷- $7x = -35$

۳۰۸- $-2x = -12$

۳۰۹- $-3x = 21$

۳۱۰- $3x = 0$

۳۱۱- $2x = 11$

۳۱۲- $9x = 15$

۳۱۳- $3x = -7$

۳۱۴- $34x = -51$

۳۱۵- $\frac{x}{3} = 7$

۳۱۶- $\frac{-x}{5} = 4$

۳۱۷- $x - 3 = 0$

۳۱۸- $x + 2 = 1$

۳۱۹- $2x - 1 = x$

۳۲۰- $5x - 7x + 8x = 12 - 5 + 7 + 10$

۳۲۱ - $-۳x - ۱۲x + ۵x = ۲۹ - ۲ + ۶ - ۱۳$

۳۲۲ - $۲x - x + ۳ = ۳x + ۶x - ۱۱$

۳۲۳ - $۱۱x - ۵ - ۹ = ۲x - ۷x - ۳۰$

---

۸۸ - حل چند معادله - مثال ۱ - مطلوبست حل معادلهٔ :

$۳x - ۸ = x + ۱۲$ ابتدا از دو طرف معادله x را کم می‌کنیم (اصل اول تا حاصل شود $۳x - x - ۸ = ۱۲$ سپس بر دو طرف ۸ واحد اضافه می‌کنیم (اصل اول) تا حاصل شود $۳x - x = ۱۲ + ۸$

و یا $۲x = ۲۰$ حال طرفین را بر ۲ تقسیم مینمائیم (اصل دوم) نتیجه میشود

$$x = ۱۰$$

تبصره - برای اینکه مبتدیان در اوائل امر از صحت اعمال خود اطمینان حاصل کنند بهتر است جواب هر معادله را بعد از حل معادله امتحان کنند یعنی آنرا در معادله بجای مجهول قرار دهند باید دو طرف معادله یکی شود

مثال ۲ - مطلوبست حل معادلهٔ $۵(x - ۳) + ۷(x - ۶) = ۲۴ - ۳(۸ - x) - ۳$

حل - ابتدا پرانتزها را برداشته اعمال جبری را که در هریک از دو طرف باید انجام

داد انجام میدهیم (ضرب میکنیم، جمله‌های متشابه را جمع مینمائیم) تا حاصل شود

$$۵x - ۱۵ + ۷x - ۴۲ = ۲۴ - ۲۴ + ۳x - ۳$$

و یا $۱۲x - ۵۷ = ۳x - ۳$

حال از دو طرف تساوی $۳x$ را کم می‌کنیم (اصل اول) تا حاصل شود $۹x - ۵۷ = -۳$

حال ۵۷ واحد بر هریک از دو طرف میافزائیم (اصل اول) تا حاصل شود

$$۹x = ۵۴$$

و سپس طرفین را بر ۹ تقسیم مینمائیم (اصل دوم) و نتیجه میشود $x = ۶$

امتحان - $۵(۶ - ۳) + ۷(۶ - ۶) = ۲۴ - ۳(۸ - ۶) - ۳$

و یا $۵ \times ۳ = ۲۴ - ۳ \times ۲ - ۳$

و بالآخره $۱۵ = ۱۵$

مثال ۳ - مطلوبست حل معادلهٔ $\frac{x}{۴} - \frac{x}{۵} = \frac{۳}{۱۰} - \frac{۴x}{۵}$

حل - در این قبیل معادلات بهتر آنست که ابتدا مخرج‌ها را از بین ببریم و برای این منظور میتوان طرفین را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب نمود . در اینمورد هرگاه طرفین را در ۲۵ ضرب کنیم حاصل میشود $۵x - ۴x = ۶ - ۱۶x$

و یا $x = ۶ - ۱۶x$ از دو طرف $۹x$ را کم می‌کنیم

تا حاصل شود $7x - 6 = 0$ و ۶- را بطرف دیگر منتقل مینمائیم نتیجه میشود

$7x = 6$ و دو طرف را بر ۷ تقسیم مینمائیم تا حاصل شود $x = \frac{6}{7}$

۸۹ - از آنچه در شماره های قبل گفته شد و از موارد استعمال اصول فوق در حل مثالهای قبل قاعدهٔ کلی زیر برای حل معادله های یک مجهولی درجهٔ اول بدست میآید

قاعده - برای حل معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول ابتدا اگر در طرفین عبارات کسری وجود داشته باشد آن عبارات را تبدیل بچند جمله ای های معمولی مینمائیم (مثال ۳) سپس اعمال جبری را که در هر طرف باید انجام داد انجام میدهیم (مثال ۲) و جمله های متشابه را در هر یک از دو طرف معادله ترکیب و خلاصه مینمائیم و چون معادله بساده ترین صورت خود تبدیل شد با مراعات اصل (۱) تمام جمله های شامل مجهول را بیکطرف معادله و تمام جمله های معلوم را بطرف دیگر انتقال میدهیم و هر دو طرف را ساده می کنیم آنگاه طرفین را بر ضریب مقدار مجهول تقسیم می نمائیم تا جواب معادله بدست آید

تبصره - مبتدیان نباید در اوائل امر هیچوقت دو عمل را در آن واحد انجام دهند بلکه هر عمل باید بعد از اتمام عمل دیگر انجام گیرد و بهتر است که هر یک از معادلات متعادلی را که در مراحل مختلف حل معادله بدست میآید روی یک سطر جداگانه بنویسند

۹۰ - بعنوان مورد استعمال قاعده های فوق بحل معادلات زیر می پردازیم .

مثال ۴ - مطلوب است حل معادلهٔ حرفی

$$\frac{2}{3}(x-a) + a(x-a) + a = 3x - 2a$$

حل - ابتدا طرفین معادله را در ۳ ضرب می کنیم تا حاصل شود

$$2(x-a) + 3a(x-a) + 3a = 9x - 6a$$

وسپس پرانتزها را برمیداریم $2x - 2a + 3ax - 3a^2 + 3a = 9x - 6a$

معلومها را بیکطرف و مجهولها را بطرف دیگر انتقال میدهیم نتیجه میشود

$$2x + 3ax - 9x = 3a^2 + 2a - 3a - 6a$$

و یا

$$3ax - 7x = 3a^2 - 7a$$

طرف اوّل را میتوان بموجب شمارهٔ (۷۷) چنین نوشت

$$(3a-7)x = 3a^2 - 7a$$

طرفین را بر $3a - 7$ تقسیم می کنیم حاصل میشود

$$x = (3a^2 - 7a) : (3a - 7)$$

که چون عمل تقسیم را انجام دهیم حاصل میشود $x = a$

مثال ۵ - مطلوبست حلّ معادله $4 - \frac{x-9}{8} = \frac{x}{22} - \frac{1}{2}$

حلّ - قبلاً متذکر میشویم که بنا بر آنچه در شمارهٔ (۷۴) گفتیم عبارتی از قبیل $\frac{x-9}{8}$

همان مفهوم $\frac{1}{8}(x-9)$ را داراست بنابراین برای حل معادلهٔ فوق طرفین را در ۸۸ که کوچکترین مضرب مشترک مخرجها است ضرب می نمائیم تا حاصل شود

$$352 - 11(x - 9) = 4x - 44$$

و پرانتز را برمیداریم نتیجه میشود $352 - 11x + 99 = 4x - 44$

و یا پس از انتقال معلومات و مجهولات بیکطرف حاصل میشود

$$-11x - 4x = -44 - 352 - 99$$

یا $-15x = -495$ (درچنین موردی میتوان علامت هر دو طرف را تغییر داد یعنی در حقیقت هر دو طرف را در ۱- ضرب نمود) حاصل میشود :

$$15x = 495$$

پس $x = \dfrac{495}{15} = 33$

تبصره - قبل از خاتمه این مبحث متذکر میشویم که هرگاه در بعضی از معادلات ضرائب مجهولها یا بعضی از جمله های معلوم کسر اعشاری باشند بهتر آنست که آنها را بکسرهای متعارفی تبدیل نمود .

مسائل و تمرینات

معادلات زیر را حل کنید :

۳۲۴ - $-7x - 4 = 17$ ۳۲۵ - $-2x + 15 = 23$

۳۲۶ - $5y - 9 = 21$ ۳۲۷ - $-3x = 25 + 2x$

۳۲۸ - $4t - 3 = 2t +$ ۳۲۹ - $3m + 2 = 4m - 3$

۳۳۰ - $3m - 3 = 3m + 4$ ۳۳۱ - $5y + 3 = 15 - y$

۳۳۲ - $2x + 15 = 27 - 4x$ ۳۳۳ - $15 + 5x = 24 + 8x$

۳۳۴ - $9x + 21 - 4x = 46$ ۳۳۵ - $y = 9 - 6y - 19 + 10y$

۳۳۶ - $7 - 3t = 5 + 4t + 11 - 16t$

۳۳۷ - $6n + 7 - 19 = 7n + 13 - 3n - 21$

۳۳۸ - $\frac{x}{3} = \frac{5}{6}$ ۳۳۹ - $\frac{2x}{3} = \frac{5}{12}$

۳۴۰ - $\frac{4y}{5} = \frac{7}{15}$ ۳۴۱ - $\frac{3x}{8} = \frac{5}{9}$

۳۴۲ - $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x = x - 9$

۳۴۳ - $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} = \frac{4x}{9} - \frac{2x}{3}$

۳۴۴ - $\frac{1}{8}x + \frac{1}{6}x - x = \frac{5}{6} - \frac{x}{2}$

۳۴۵ - $2x - 3 = 2x - 7$

۳۴۶ - $-3x + 4 = -5(x + 2)$

۳۴۷ - $8(x - 1) + 17(x - 3) = 4(4x - 9) + 4$

۳۴۸ - $15(x - 1) + 4(x + 3) = 2(7 + x)$

۳۴۹ - $7(25 - x) 2x = 2(3x - 25)$

۳۵۰- $3(169 - x) - (78 + x) = 29x$

۳۵۱- $-7z - 39 + 10z + 15 = 100 + 33z + 26$

۳۵۲- $118 + 65z - 123 = 15z + 35 + 120z$

۳۵۳- $179 - 18(y + 10) = 158 - 2(y - 17)$

۳۵۴- $97 - 5(y + 20) = 111 - 8(y + 3)$

۳۵۵- $25t - 19 - [3 - (4t - 5)] = 3t - (6t - 5)$

۳۵۶- $(x+1)(2x+1) = (x+3)(2x+3) - 14$

۳۵۷- $2(x+1)(x+3) + 8 = (2x+1)(x+5)$

۳۵۸- $2(x-4) - (x^2 + x - 20) = 4x^2 - (5x+2)(x-4) - 64$

۳۵۹- $(x+15)(x-3) - (x^2 - 6x + 9) = 30 - 15(x-1)$

۳۶۰- $2m - 5[3m - 7(4m - 9)] = 66$

۳۶۱- $(x+1)(2x+3) = 2(x+1)(x+1) + 8$

۳۶۲- $3(x-1)^2 - 3(x^2 - 1) = x - 15$

۳۶۳- $(3x+1)(2x-7) = 6(x-3)^2 + 7$

۳۶۴- $x^2 - 8x + 25 = x(x-4) - 25(x-5) - 16$

۳۶۵- $x(x+1) + (x+1)(x+2) = (x^2+3) + x(x+2) - 9$

۳۶۶- $2(x+3)(x-4) = x(2x+1) - 21$

۳۶۷- $(x+1)^2 + 2(x+3)^2 = 3x(x+2) + 35$

۳۶۸- $84 + (x+4)(x-3)(x+5) = (x+1)(x+2)(x+3)$

۳۶۹- $(x+1)(x+2)(x+6) = x^3 + 9x^2 + 4(7x-1)$

۳۷۰- $-\frac{x}{4} - \frac{x+5}{3} = 10$

۳۷۱- $\frac{x-2}{2} + \frac{x+10}{9} = 5$

۳۷۲- $\frac{x-4}{7} = \frac{x-10}{5}$

۳۷۳- $\frac{x-1}{8} = 1 + \frac{x+1}{18}$

۳۷۴- $\frac{x+4}{14} + \frac{x-4}{6} = 2$

۳۷۵- $\frac{x+20}{9} + \frac{3x}{7} = 6$

۳۷۶- $\frac{z+5}{6} - \frac{z+1}{9} = \frac{z+3}{4}$

۳۷۷- $\frac{4-5z}{6} - \frac{1-2z}{3} = \frac{13}{42}$

۳۷۸- $\frac{4(y+2)}{3} - \frac{6(y-7)}{7} = 12$

۳۷۹- $1 + \frac{y}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{3y}{4} - 4\frac{1}{2}$

۳۸۰- $x + \frac{5}{3}(x-7) - \frac{6}{7}(x-8) = 3x - \frac{43}{3}$

۳۸۱- $\frac{3x}{4} - \frac{6}{17}(x+10) - (x-3) = \frac{x-7}{51} - 4\frac{3}{4}$

۳۸۲- $\frac{7x}{5} - \frac{1}{14}(x-11) = \frac{3}{7}(x-25) + 24$

۳۸۳- $3 + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{x}{2}\right) - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(11 - \frac{x}{2}\right)$

۳۸۴- $\frac{1}{5}(x-8) + \frac{4+x}{3} + \frac{x-1}{7} = 7 - \frac{23-x}{5}$

۳۸۵- $x - \left(3x - \frac{2x-5}{10}\right) = \frac{1}{6}(2x - 57) - \frac{5}{3}$

معادله های حرفی زیر را حل کنید (در این معادله ها فقط x مجهول است و باقی حرفها معلوم اند)

۳۸۶- $6x - 5a + 10x - 3a = 8a$

۳۸۷- $ax + a(x-1) = a$

۳۸۸- $(a+b)x - ax = 2bx - b(a+b)$

۳۸۹- $ax + bx + cx = a^2 + ab + ac$

۳۹۰- $mx + nx = m^2 + n^2 + 2mn$

۳۹۱- $2Rx + R(R-x) = R(R+2x)$

۳۹۲- $x + ax + bx - a = (a+b)(x-1)$

۳۹۳- $(a+b)x - (a-b)x = bx + b^2$

۳۹۴- $-7x + x(1-a) = 4(a+2x)$

فصل نهم

ساده ترین اقسام کسر

I - بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک مابین چند جمله

۹۱- **تعریف** - هرگاه دو یا چند عبارت جبری بر یک عبارت جبری دیگر قابل قسمت باشند عبارت جبری اخیر را مقسومٌ علیه مشترک عبارات مزبور مینامند . چنانچه عبارات مزبور دارای چندین مقسومٌ علیه مشترک باشند مابین این مقسومٌ علیه های مشترک آنرا که درجه اش از سایرین بزرگتر است بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات مزبور میگویند

در این فصل ما فقط بتعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات ساده (یک جمله ای) می پردازیم .

۹۲- **طریق تعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک چند عبارت ساده** - برای تعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات ساده بطریق زیر عمل مینمائیم :

اوّلاً - هرگاه عبارات مفروض فقط از قوای مختلف یک حرف تشکیل یافته باشند یا بین آنها جمله ای که نمای آن از همه کوچکتر است بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک مطلوب است

مثال - مابین عبارات a^4 و a^3 و a^2 و a^6 عبارت a^2 بزرگترین مقسوم علیه مشترک است .

ثانیاً - هرگاه عبارات مفروض حاصلضرب قوای مختلف چندین حرف باشند فقط باید بین قوای حرفهائیکه در تمام جمله‌ها مشترک است یکی یکی بطریقی در فوق گفتیم (قسمت اولاً) بزرگترین مقسوم علیه مشترک معین کرده و تمام این بزرگترین مقسوم علیه مشترکها را در یکدیگر ضرب مینمائیم تا بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام عبارات مزبور بدست آید . واضح است که اگر تمام عبارات مزبور دارای ضرائب عددی باشند بزرگترین مقسوم علیه مشترک این ضریب‌ها ضریب بزرگترین مقسوم علیه مشترک عبارات مزبور خواهد بود .

مثال ۱- مابین عبارات a^3b^4 و abc^2 و a^2b^7c بزرگترین مقسوم علیه مشترک عبارتست از ab^4 زیرا a بزرگترین مقسوم علیه مشترک a^2 و a و a^3 ونیز b^4 بزرگترین مقسوم علیه مشترک b^7 و b^5 و b^4 میباشد ولی c در تمام جمله‌ها مشترک نیست .

مثال ۲- مابین عبارات $21a^4x^3y$ و $35a^2x^4y$ و $28a^3xy^4$ عبارت $7a^2xy$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک است

۹۳ - هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک چند عبارت عدد ۱ باشد آن عبارت را نسبت بهم اول میگویند مانند عبارات $17x^4y$ و $13a^2b^3$

۹۴ - تعریف کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت جبری - هرگاه یک عبارت جبری بر چندین عبارت جبری دیگر قابل قسمت باشد عبارت مزبور را مضرب مشترک عبارات اخیر مینامند . واضح است که عدهٔ مضربهای مشترک چند عبارت جبری بسیار است زیرا اگر یکی از مضربهای مشترک را در هر عبارت جبری اختیاری ضرب نمائیم مضرب مشترک دیگری از همان عبارات بدست خواهد آمد

مابین تمام مضارب مشترک چند عبارت آنرا که درجه‌اش از همه کوچکتر است کوچکترین مضرب مشترک عبارات مفروض مینامند

در این فصل ما فقط بتعیین کوچکترین مضرب مشترک عبارات یک جمله‌ای میپردازیم

۹۵- طریق تعیین کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت ساده - اولاً هرگاه عبارات مزبور فقط از قوای مختلف یک حرف تشکیل یافته باشند بین آنها جمله‌ای که نمای آن از همه بزرگتر است کوچکترین مضرب مشترک مطلوبست

مثال - مابین عبارات a^2 و a^4 و a^3 و a^6 عبارت a^6 کوچکترین مضرب

مشترک است

ثانیاً - هرگاه عبارات مفروض از قوای مختلف چندین حرف تشکیل یافته باشند باید کوچکترین مضرب مشترک قوای هر حرف را (اعم از حرفهای مشترک و غیر مشترک) بطریق فوق یافته و حاصلها را در هم ضرب نمود تا کوچکترین مضرب مشترک عبارات مزبور بدست آید . چنانچه بعضی از این عبارات دارای ضریب عددی باشند باید کوچکترین مضرب مشترک ضرائب عددی مزبور را نیز تعیین کرده آنرا ضریب کوچکترین مضرب مشترک مزبور قرار داد .

مثال ۱- با این عبارات a^3b^4 و ab^5 و a^2b^7 عبارت a^3b^7 کوچکترین مضرب مشترک است .

مثال ۲- با این عبارات $21a^4x^2y$ و $35a^2x^4y$ و $28a^3xy^4$ عبارت $420a^4x^4y^4$ کوچکترین مضرب مشترک میباشد

تبصره - اگر چند عبارت دو بدو دارای مقسوم علیه مشترک نباشند کوچکترین مضرب مشترک آنها حاصل ضرب آن عبارات است .

تمرینات

مطلوبست تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک عبارات زیر :

۳۹۵- $4ab^2$ و $2a^2b$ ۳۹۶- $3x^2y^2$ و x^3y^2

۳۹۷- abc و $2ab^2c$ ۳۹۸- $5a^3b^3$ و $15abc^2$

۳۹۹- $4a^2b^3c^2$ و $6a^3b^2c^3$ ۴۰۰- $7a^2b^4c^2$ و $14ab^2c^3$

۴۰۱- $8a^2x$ و $6abxy$ و $10abx^2y^2$

۴۰۲- $49ax^2$ و $63ay^2$ و $56az^2$

مطلوبست تعیین کوچکترین مضرب مشترک عبارات زیر :

۴۰۳- $25b$ و $3bc$ و $4ca$

۴۰۴- $2x$ و $3y$ و $4z$

۴۰۵- $7a^2$ و $2ab$ و $3b^3$

۴۰۶- a^2bc و c^2ab و b^2ca

۴۰۷- $2x^2y^3$ و $3xy$ و $4x^3y^4$

۴۰۸- $7x^4y$ و $8xy^5$ و $2x^3y^3$

۴۰۹- $66a^4b^3c^3$ و $44a^3b^4c^2$ و $24a^2b^3c^4$

II - کسرهای ساده

۹۶- **تعریف** - هرگاه کمیتی مانند x را به b قسمت متساوی تقسیم کرد و a قسمت از آن را اختیار نمائیم حاصل را کسر $\frac{a}{b}$ از کمیت x مینامند و اگر x برابر با واحد باشد کسر $\frac{a}{b}$ از x را مطلقاً کسر $\frac{a}{b}$ مینامند

۹۲- دراین فصل ما فقط از کسرهائی گفتگو مینمائیم که صورت و مخرج آنها عبارات ساده جبری (عبارات یک جمله ای) باشند تبدیل این قبیل کسرها و خلاصه کردن آنها واجرای اعمال اصلی درباره آنها بهمان قاعده هائی که درحساب معمول بوده است بعمل میآید و ما درفصل دوازدهم دلیل این اعمال را درباره تمام انواع کسر مفصلاً مورد مطالعه قرار میدهیم اعمالی که درباره کسرها بکار میروند عبارتند از :

۹۸ - تبدیل کسر بساده ترین صورت خود - برای اجرای این عمل صورت و مخرج کسر را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان (بعبارت دیگر بر تمام عواملی که در صورت و مخرج مشترک است) تقسیم مینمایند .

مثال -

$$\frac{6a^2c}{9ac^2} = \frac{2a}{3c} \quad \text{و} \quad \frac{35a^5b^3c}{7ab^2c} = 5a^4b$$

۹۹- ضرب کسرهای جبری دریکدیگر - برای ضرب چندین کسر دریکدیگر تمام صورتها را درهم ضرب کرده حاصل را صورت قرار میدهیم و تمام مخرج ها را نیز دریکدیگر ضرب کرده مخرج قرار میدهیم

مثال ۱-

$$\frac{2a}{3b} \times \frac{5x^2}{2a^2b} \times \frac{3b^2}{2x} \quad \frac{2a \times 5x^2 \times 3b^2}{3b \times 2a^2b \times 2x}$$

حال میتوانیم کسر را خلاصه کنیم یعنی صورت و مخرج آن را بر عوامل مشترکشان تقسیم نمائیم و حاصل میشود $\frac{5x}{2a}$

مثال ۲ -

$$\frac{3a^2b}{5c^2} \times \frac{7bc}{3a^3} \times \frac{5ca}{7b^2} = \frac{105a^3b^2c^2}{105a^3b^2c^2} = 1$$

۱۰۰- تقسیم یک کسر بر کسر دیگر - کسر مقسوم علیه را معکوس مینمائیم و آنرا در کسر مقسوم ضرب می کنیم و درصورت امکان کسر را خلاصه مینمائیم تا خارج قسمت بدست آید

مثال -

$$\frac{7a^3}{4x^3y^2} \times \frac{6c^3x}{5ab^2} \div \frac{28a^2c^2}{15b^2xy^2} = \frac{7a^3}{4x^2y^2} \times \frac{6c^3x}{5ab^2} \times \frac{15b^2xy^2}{28a^2c^2} = \frac{9c}{8x}$$

۱۰۱- تبصره - درمورد ضرب اعداد صحیح دریک کسر یا تقسیم یک کسر بر عدد صحیح وغیره باید درنظر داشت که هر عدد صحیح را میتوان کسری با مخرج واحد دانست

تمرینات

کسرهای زیر را بساده ترین صورت خلاصه نمائید

۴۱۰ $\frac{3a}{6ab}$

۴۱۱ $\frac{4a^2}{16ab}$

۴۱۲ $\frac{2xy^2}{5x^2y}$

۴۱۳ $\frac{x^2yz^3}{x^3y^2z}$

۴۱۴ $\frac{15ab}{25bc}$

۴۱۵ $\frac{8a^2b}{12b^2c}$

۴۱۶ $\frac{12mn^2p}{15mn^2p^2}$

۴۱۷ $\frac{15m^2p^3}{18n^4p}$

۴۱۸ $\frac{3x^2yz^3}{5xy^4z^2}$

۴۱۹ $\frac{5a^3b^2c^4}{15ab^4c}$

عبارات زیر را خلاصه کنید

۴۲۰ - $\frac{2ab}{3cd} \times \frac{c^2d^3}{ab^2}$

۴۲۱ - $\frac{24ab^2}{36bc^2} \times \frac{12a^2bc}{8ab^3}$

۴۲۲ - $\frac{7a^2b^3}{9ax^2y} \times \frac{18x^2c}{15ac^4}$

۴۲۳ - $\frac{8m^2n^3}{9x^2yz} \times \frac{15xyz^3}{16mn^2}$

۴۲۴ - $\frac{3a^2b}{4b^3c} \times \frac{2c^2}{8a^3} : \frac{6ac}{16b^2x}$

۴۲۵ - $\frac{2x^2y}{3yz} \times \frac{5z^2x}{7xy^2} : \frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$

۴۲۶ - $\frac{7m^2p}{17x^2y} \times \frac{51y^3z}{21p^2n} : \frac{m^2n^2}{pyz}$

۴۲۷ - $\frac{15b^2}{40c} \times \frac{27c^2}{81d^3} : \frac{abc}{14d^3}$

---

۱۰۲ - تبدیل چندین کسر بکسرهائی با مخرج مشترک - همچنانکه در حساب نیز معمول است برای جمع و تفریق چندین کسر باید ابتدا آنها را بکسرهائی تبدیل نمائیم که معادل آنها بوده دارای مخرج مشترک باشند و برای اینکار بهتر است که کوچکترین مضرب مشترک مخرجها را بعنوان مخرج مشترک اختیار نمائیم

مثال - برای تبدیل کسرهای $\frac{a}{3xy}$ و $\frac{b}{6xyz}$ و $\frac{c}{2yz}$ بکسرهائی با مخرج مشترک ملاحظه می نمائیم که کوچکترین مضرب مشترک مخرجها $6xyz$ است پس صورت و مخرج هرکسر را در عامل مناسبی ضرب مینمائیم که مخرج آن کسر $6xyz$

شود و یا بعبارت دیگر $6xyz$ را بر هر مخرج تقسیم کرده حاصل را در صورت ضرب مینمائیم و کسرهای زیر بدست میآید که با کسرهای فوق معادل بوده مخرج آنها یکی است

$$\frac{2az}{6xyz} \text{ ، } \frac{b}{6xyz} \text{ ، } \frac{3cz}{6xyz}$$

۱۰۳ - جمع و تفریق کسرها - برای جمع چندین کسر ابتدا آنها را بکوچکترین مخرج مشترک تحویل مینمائیم سپس مجموع جبری صورتها را صورت کسر حاصل جمع و مخرج مشترک را مخرج آن قرار میدهیم هر جمله که دارای مخرج نباشد مخرج آنرا یک محسوب میداریم

مثال ۱ - میخواهیم عبارت $\frac{5x}{3} + \frac{3}{4}x - \frac{7x}{6}$ را خلاصه کنیم.

کوچکترین مخرج مشترک عبارت است از ۱۲ و بنابراین داریم :

عبارت مفروض $= \frac{20x + 9x - 14x}{12} = \frac{15x}{12} = \frac{5x}{4}$

مثال ۲ - میخواهیم عبارت $\frac{3ab}{5x} - \frac{ab}{2x} - \frac{1}{10}\frac{ab}{x}$ را خلاصه نمائیم

عبارت مفروض $= \frac{6ab - 5ab - ab}{10x} = \frac{0}{10x} = 0$

مثال ۳ - میخواهیم عبارت $\frac{2x}{a^3c^2} - \frac{y}{3ca^3}$ را خلاصه نمائیم

عبارت مفروض $= \frac{6ax - cy}{3a^3c^2}$

این کسر بصورت ساده تری خلاصه نمیشود .

تبصره - قبل از جمع کسرها باید هر یک از آنها را که قابل تحویل بکسر ساده تری هستند خلاصه کرده و سپس عمل جمع را انجام داد

۱۰۴ - تبصرهٔ نهم - مبتدیان باید توجه کنند که عمل حذف عوامل مشترک از صورت و مخرج را با عمل جمع جمله های متشابه در صورت اشتباه ننمایند گذشته از این باید در نظر داشته باشند که یک عامل مشترک را فقط وقتی میتوان از صورت و از مخرج حذف نمود که آن عامل در تمام جمله های صورت و مخرج موجود باشد مثلاً در عبارت :

$\frac{6ax - cy}{3a^3c^2}$ (مثال ۳) نمیتوان عامل c را از صورت و مخرج حذف کرد زیرا این عامل فقط در cy وجود دارد نه در تمام جمله های صورت و همچنین است در مورد عامل a که فقط در $6ax$ وجود دارد

تمرینات

عبارات زیر را خلاصه کنید

۴۲۸ - $\frac{x}{2} - \frac{x}{3}$

۴۲۹ - $\frac{a}{3} - \frac{a}{4}$

۴۳۰ - $\frac{2x}{3} - \frac{5}{x}$

۴۳۱ - $\frac{a}{4} - \frac{b}{6}$

۴۳۲ - $\frac{m}{8} - \frac{n}{12}$

۴۳۳ - $\frac{x}{7} - \frac{y}{21}$

۴۳۴ - $\frac{a}{13} + \frac{b}{39}$

۴۳۵ - $\frac{5m}{12} - \frac{n}{36}$

۴۳۶ - $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{5}$

۴۳۷ - $\frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{5}$

۴۳۸ - $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{3x}{4}$

۴۳۹ - $\frac{3x^3}{ax^2} - \frac{2y}{3b}$

۴۴۰ - $x - \frac{y^2}{yz}$

۴۴۱ - $\frac{a^3}{3a^2} - \frac{b^2}{a}$



فصل دهم

اتحادهای جبری و بعضی از موارد استعمال آنها

I - تعیین قوای عبارات یکجمله ای

۱۰۵ - برای اینکه یک عبارت یک جمله ای را بقوهٔ معینی برسانیم قبلاً ملاحظه مینمائیم که بنا بقاعدهٔ علامتها اولاً تمام قوای زوج هر عدد اعم از عدد مثبت یا عدد منفی عدد مثبت میباشد ثانیاً قوای فرد هر عدد با خود آن عدد دارای یک علامت میباشند. بخصوص باید همیشه در نظر داشت که مجذور هر عدد اعم از منفی یا مثبت عدد مثبت است

حال گوئیم بنا بر آنچه در مبحث ضرب گفته شد تساویهای زیر برقرار است :

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$$

$$(-x^3)^2 = (-x^3)(-x^3) = x^{3+3} = x^6$$

$$(-a^5)^3 = (-a^5)(-a^5)(-a^5) = -a^{5+5+5} = -a^{15}$$

۲×۲×۲×۲×۲ = -۳۲

$$(-3a^3)^4 = (-3)^4 (a^3)^4 = 81 a^{12}$$

و از آنجا قاعدهٔ زیر برای تعیین قوای عبارات یک جمله ای بدست میآید :

۱۰۶ - قاعده - ضریب عبارت مفروض را همانطور که در حساب معمول است بقوهٔ مفروض رسانده و مطابق قاعدهٔ علامتها علامت آنرا معین مینمائیم تا ضریب عبارت مطلوب بدست آید سپس نمای هریک از عوامل جمله را در نمای قوهٔ جدید ضرب مینمائیم تا نمای همان عامل در حاصلضرب بدست آید . بنابقاعدهٔ فوق تساویهای زیر محقق میباشند :

$$(-2x^2)^5 = -32x^{10} \qquad (-3ab^3)^6 = 729a^6b^{18}$$

$$\left(\frac{2ab^3}{3x^2y}\right)^4 = \frac{16a^4b^{12}}{81x^8y^4}$$

II - اتّحادهای مهمّ جبری

۱۰۷ - در شمارهٔ (۸۰) گفتیم که اتّحاد عبارتست از تساوی مابین دو عبارت جبری بطوریکه بازاء تمام مقادیر عددی که بحروف نسبت داده شود مقدار عددی طرفین تساوی یکی شود و این در حالتی ممکن است که یکی از دو عبارت جبری مزبور نتیجه و خلاصهٔ اعمال جبری باشد که در عبارت دیگر انجام گرفته است .

اتّحادهای جبری زیادند ولی بعضی از آنها که در محاسبه های جبری موجب سهولت

بسیار میشوند موارد استعمال زیاد دارند و از آن جمله اند اتّحادهای زیر که برای تعیین قوای عبارات جبری بکار میروند :

۱۰۸ - تعیین قوهٔ دوّم هر عبارت دو جمله ای - هرگاه عبارت $a+b$ را در خودش ضرب کنیم (بقوهٔ دو برسانیم) و همین عمل را در مورد $a-b$ نیز انجام دهیم حاصل میشود :

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$

و یا

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (2)$$

دو اتّحاد فوق را میتوان یکجا بطریق زیر بیان کرد :

قوهٔ دوّم هر عبارت دو جمله ای مساوی است با مجموع قوای دوّم هریک از دو جمله بعلاوهٔ دو برابر حاصلضرب آن دو جمله (دقت کرد که ضمن عمل ضرب باید علامت را رعایت کرد بنابراین یکی یا هر دو جمله میتوانند دارای علامت منفی باشند)

در دو اتّحاد (۱) و (۲) مقادیر a و b نمایندهٔ عبارات یک جمله ای

میباشند و بنابراین مثلاً میتوان تساویهای زیر را نوشت :

$$(x+2y)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$(3a-1)^2 = (3a)^2 + (-1)^2 + 2(-1)(3a) = 9a^2 + 1 - 6a$$

$$(2a^3 - 3b^2)^2 = (2a^3)^2 - 2(2a^3)(3b^2) + (3b^2)^2$$

$$= 4a^6 - 12a^3 + 9b^4$$

۱۰۹ - اتحادهای فوق علاوه برآنکه طریق تعیین مجذور تمام عبارات دوجمله ای را بدست میدهند وسیله ای برای مجذور نمودن اعداد حسابی در ذهن میباشند :

$$(1012)^2 = (1000+12)^2 = (1000)^2 + 2 \times 1000 \times 12 + (12)^2$$

$$= 1000000 + 24000 + 144 = 1024144$$

و

$$98^2 = (100-2)^2 = (100)^2 - 2 \times 100 \times 2 + (2)^2 =$$

$$10000 - 400 + 4 = 9604$$

۱۱۰ - تعیین قوهٔ دوم هر عبارت جبری - هرگاه یک عبارت جبری شامل سه جمله باشد و بخواهیم آنرا بقوهٔ دو برسانیم میتوان دو جملهٔ آنرا در داخل پرانتزی قرار داده و آنرا یک جمله فرض کرد و همان قاعدهٔ شمارهٔ ۱۰۸ را بکار برد و اگر شامل چهار جمله باشد میتوان آن جمله ها را دو بدو یکی فرض نمود و بنابراین خاصیت داریم :

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

که چون $a+b$ را بنابر قاعدهٔ شمارهٔ (۱۰۸) بقوهٔ ۲ برسانیم حاصل میشود

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

بهمین طریق خواهیم داشت : $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

و نیز

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b)+(c+d)]^2 =$$

$$(a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

و همین تدبیر را میتوان در مورد هر چند جمله که داشته باشیم بکار برد و از آنجا قاعدهٔ زیر بدست میآید .

قاعده - قوهٔ دوم هر عبارت چند جمله ای برابر است با مجموع قوای دوم تمام جمله های آن بعلاوه دو برابر حاصلضرب هر جمله در جمله های دیگر (با رعایت علامت جمله ها)

۱۱۱ - قوهٔ سوم هر عبارت دو جمله ای - صحت دو اتحاد زیر بوسیلهٔ عمل ضرب معلوم میگردد .

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (3)$$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (۴)$$

در این دو اتحاد نیز میتوان بجای a و b هر عبارت جبری دلخواه را قرار داد و بنا بر این میتوان گفت

قاعده - قوهٔ سوم هر عبارت دوجمله‌ای مساویست با مجموع قوای سوم هر جمله (با رعایت علامت) باضافهٔ سه برابر قوهٔ دوم هر جمله در جملهٔ دیگر (با رعایت علامت)

بنا بر قاعدهٔ فوق مثلاً میتوانیم بنویسیم

$$(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3(2x)y^2 + y^3$$

$$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

$$(3x-2a^2)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2a^2) + 3(3x)(2a^2)^2 - (2a^2)^3$$

$$= 27x^3 - 54x^2a^2 + 36xa^4 - 8a^6$$

۱۱۲- اتحاد های دیگر - بجز اتحاد های فوق که مورد استعمال آنها در تعیین قوای دوم و سوم عبارات جبری است اتحاد های دیگری وجود دارند که در موارد بسیار موجب سهولت محاسبه میشوند از قبیل :

۱۱۳- حاصلضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله - هرگاه عبارت $a+b$ را در عبارت $a-b$ ضرب کنیم حاصل میشود :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 \qquad (۵)$$

یعنی

قاعده - حاصلضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله مساویست با مجذور جملهٔ اول منهای مجذور جملهٔ دوم

از روی اتحاد فوق میتوان مثلاً روابط زیر را نوشت :

$$(5x-4y)(5x+4y) = 25x^2 - 16y^2$$

$$(a^2-b^2)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$$

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab - c^2$$

وغیره

۱۱۴- حاصلضرب دو عبارت دوجمله‌ای که در یک جمله مشترک اند - اگرچه در شمارهٔ (۶۲) طریقهٔ تعیین این نوع حاصلضربها را گفتیم لیکن برای آنکه در این مورد تمام اتحاد ها را ضمن یک مبحث ذکر کرده باشیم تکرار آن میپردازیم صحت تساوی زیر بوسیلهٔ عمل ضرب معلوم میشود

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

یا (۶) $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ یعنی

قاعده - حاصلضرب دو عبارت دوجمله‌ای که در یک جمله مشترک اند برابر است با مجذور جملهٔ مشترک باضافهٔ حاصلضرب جملهٔ مشترک در مجموع دو جملهٔ غیرمشترک باضافهٔ حاصلضرب دو جملهٔ غیرمشترک (در تمام این اعمال باید هر جمله را با علامت خود در نظر گرفت)

بنابر اتحاد فوق داریم

$$(a^2+2b)(a^2+3b)=a^4+5a^2b+6b^2$$

$$(x+11)(x-15)=x^2-4x-165$$

۱۱۵ - دو اتحاد زیر که صحت آنها بوسیلهٔ عمل ضرب تأیید میگردد گاهی مورد استعمال دارند و شایسته است که آنها را نیز از حفظ داشته باشیم

$$(a^2+b^2+ab)(a-b)=a^3-b^3$$

$$(a^2+b^2-ab)(a+b)=a^3+b^3$$

بنابراین اتحاد مثلاً داریم

$$(1+4a)(1+16a^2-4a)=1+64a^3$$

$$(a-2b)(a^2+4b^2+2ab)=a^3-8b^3$$

تمرینات

مقدار هریک از عبارات زیر را بنویسید :

۴۴۲ - $(3ab^3)^2$

۴۴۳ - $(a^3c)^2$

۴۴۴ - $(11b^2c^3)^2$

۴۴۵ - $(4a^4b^5x^2)^2$

۴۴۶ - $(4xyz^3)^2$

۴۴۷ - $(\frac{7ab}{3})^2$

۴۴۸ - $(-\frac{3a^5}{5x^2})^2$

۴۴۹ - $(2ab^2)^3$

۴۵۰ - $(-5ab^2)^3$

۴۵۱ - $(-6a^6)^3$

۴۵۲ - $(-\frac{2}{3}a^5)^3$

۴۵۳ - $(\frac{1}{2y^2})^3$

۴۵۴ - $(-a^2x)^6$

۴۵۵ - $(2x^3y)^5$

۴۵۶ - $(\frac{3x^4}{2y^3})^5$

۴۵۷ - $(\frac{2x^3}{3y})^8$

۴۵۸ - $(-\frac{2x^5}{3a^4})$

۴۵۹ - $(-3a^2b^3x^6)^9$

۴۶۰ - $(a-3b)^2$

۴۶۱ - $(x-5y)^2$

۴۶۲ - $(3x-y)^2$

۴۶۳ - $(3x+5y)^2$

۴۶۴ - $(5ab-c)^2$

۴۶۵ - [illegible]

۴۶۶ - $(ax+2by)^2$

۴۶۷ - $(x^2-1)^2$

۴۶۸ - $(a+b-c)^2$

۴۶۹ - $(a+2b+c)^2$

۴۷۰ - $(x^2-y^2-z^2)^2$

۴۷۱ - $(xy+yz+zx)^2$

۴۷۲ - $(x^2-x+1)^2$

۴۷۳ - $(2x^2+3x-1)^2$

۴۷۴ - $(2x+3y+a-2b)^2$

۴۷۵ - $(\frac{a}{4}-2b-\frac{3}{2})^2$

۴۷۶ - $(x+a)^2$

۴۷۷ - $(x+a)^3$

۴۷۸ - $(2x+y)^3$

۴۷۹ - $(3x-5y)^3$

۴۸۰ - $(2ab-3c)^3$

۴۸ - $(5a-bc)^3$

۴۸۲ - $(x^2+3y^2)^3$

۴۸۳ - $(4x^2-5y)^3$

۴۸۴ - $(5x^5-3y^3)^3$

۴۸۵ - $(a-\frac{2b}{3})^3$

۴۸۶ - $(\frac{x^2}{3}-3x)^3$

۴۸۷ - $(\frac{a}{6}+2x)^3$

۴۸۸ - $(x-3y)(x+3y)$

۴۸۹ - $(2x-3b)(2x+3b)$

۴۹۰ - $(x^2-y)(x^2+y)$

۴۹۱ - $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

۴۹۲ - $(a+bc)(a-bc)$

۴۹۳ - $(2a+xy)(2a-xy)$

۴۹۴ - $(x^2+2bc)(x^2-2bc)$

۴۹۵ - $(xy^2-yz)(xy^2+yz)$

۴۹۶ - $(5+3x^2)(5-3x^2)$

۴۹۷ - $(\frac{a}{4}-\frac{a^2}{5})(\frac{a}{4}+\frac{a^2}{5})$

۴۹۸ - $(x-17)(x+11)$

۴۹۹ - $(x^2-6)(x^2+9)$

۵۰۰ - $(3y-7)(3y+10)$

۵۰۱ - $(a-2b)(a^2+4b^2+2ab)$

۵۰۲ - $(1+5a)(1+25a^2-5a)$

۵۰۳ - $(2a-3)(4a^2+9+6a)$

۵۰۴ - $(2x+3y)(4x^2+9y^2-6xy)$

۵۰۵ - $(x^2+9y^2-3xy)(x+3y)$

صحت اتحادهای زیر را تحقیق نمائید

۵۰۶ - $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵۰۷ - $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

۵۰۸ - $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6b^2a$

۵۰۹ - $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

۵۱۰ - $(a+b-c)(a-b-c)=a^2+c^2-2ac-b^2$

۵۱۱ - $(a^2+b^2)(a^4+b^4+a^2b)=a^6-b^6$

فصل یازدهم

تجزیه عبارات جبری بحاصلضرب عوامل اوّل بزرگترین مقسومٌ علیه مُشترک و کوچکترین مضرب مشترک عبارات جبری

۱۱۶ - هرگاه یک عبارت جبری جز بر خودش و بر عدد ۱ (صرفنظر از علامت) قابل تقسیم نباشد آن عبارت را اوّل میگویند مانند عبارات $2-x$ و $3a+11$ و a^2+b^2 و $ab-6$ که فقط بر خودشان قابل قسمت میباشند.

سایر عبارات جبری که اوّل نمیباشند درحالت کلّی حاصلضرب دو یا چند عبارت جبری اوّل هستند که هریک از آنها را یک عامل یا یک فاکتور از عبارت مزبور گویند مثلاً $4x-4xy = 4 \times x \times (1-y)$ عبارت

پس ۴ و x و $1-y$ هریک عاملی از عبارت $4x-4xy$ میباشند و عبارت $5x^2yz^3$ حاصلضرب عبارات ۵ و x و x و y و z و z و z است و هریک از این اعداد را یک فاکتور از عبارت مزبور میگویند.

مبحث فاکتورگیری و تجزیه عبارات مهمترین مباحث جبر مقدماتی است و دارای موارد استعمال بسیار میباشد دراین فصل میخواهیم مهمترین قاعدهائی راکه برای تجزیهٔ

عبارات جبری بحاصل ضرب عوامل معمول است شرح دهیم

۱۱۷ - تجزیه عباراتی که همهٔ جمله های آنها دارای عامل مشترکی میباشند

درعبارت $ab - ac$ هردوجملهٔ ab و ac دارای عامل مشترک a میباشندپس داریم:

$ab - ac = a(b-c)$ یعنی عبارت مزبور بحاصلضرب دو عامل a و $b-c$ تجزیه شده است

قاعده - وقتی که تمام جمله های یک عبارت دارای عامل مشترکی باشند تمام جمله ها را بر آن عامل مشترک تقسیم مینمائیم و مجموع جبری خارج قسمتها را در داخل پرانتزی نوشته عامل مشترک را مانند ضریبی درمقابل پرانتز مینویسیم

مثال ۱ - $3a^2 - 6ab = 3a(a-2b)$

مثال ۲ - $5a^2bx^3 - 15abx^2 - 20b^3x^2 = 5bx^2(a^2x - 3a - 4b^2)$

تمرینات

عبارت های زیر را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنید

۵۱۲ - $a^3 - ax$ ۵۱۳ - $x^3 - x^2$

- ۵۱۴ $2a - 2a^2$
- ۵۱۵ $7p^2 + p$
- ۵۱۶ $8x - 2x^2$
- ۵۱۷ $5ax - 5a^3x^2$
- ۵۱۸ $x + xy$
- ۵۱۹ $x^3 - x^2y$
- ۵۲۰ $5x - 25x^2y$
- ۵۲۱ $16x + 64x^2y$
- ۵۲۲ $15a^2 - 225a^4$
- ۵۲۳ $54 - 81x$
- ۵۲۴ $3x^3 - x^2 + x$
- ۵۲۵ $6x^3 + 2x^4 + 4x^5$
- ۵۲۶ $x^3 - x^2y + xy^2$
- ۵۲۷ $2x^2y^3 - 6x^2y^2 + 2xy^3$
- ۵۲۸ $6x^3 - 9x^2y + 12xy^2$
- ۵۲۹ $7a - 7a^3 + 14a^4$
- ۵۳۰ $38a^3x^5 + 57a^2x^2$



۱۱۸- تجزیهٔ عبارات بوسیلهٔ دسته بندی - مقصود از تجزیه بوسیله دسته بندی آنست که عبارت مفروضی را بچند دسته چنان تقسیم کنیم که جمله‌های هر دسته دارای عامل مشترکی باشند بطوریکه بعد از تجزیهٔ هر دسته تمام دسته‌ها

دارای عامل مشترک دیگری بشوند

مثال ۱- عبارت $x^2 - ax + bx - ab$ را بدو دسته تقسیم مینمائیم یکی $x^2 - ax$ که دو جملهٔ آن دارای عامل x هستند و یکی $bx - ab$ که دو جملهٔ آن دارای عامل b میباشند پس

$$x^2 - ax + bx - ab = (x^2 - ax) + (bx - ab) =$$

$$x(x-a) + b(x-a)$$

حال ملاحظه میشود که دو جملهٔ عبارت جدید هر دو دارای عامل $x - a$ میباشند

پس $(x-a)(x+b) =$ عبارت مفروض

مثال ۲- عبارت $6x^2 - 9ax + 4bx - 6ab$ را بوسیلهٔ دسته بندی بطریق زیر تجزیه مینمائیم

$$6x^2 - 9ax + 4bx - 6ab = (6x^2 - 9ax) + (4bx - 6ab).$$

$$= 3x(2x - 3a) + 2b(2x - 3a) =$$

$$(2x - 3a)(3x + 2b)$$

مثال ۳- تجزیهٔ عبارت $12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2$:

$$12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2 = (12a^2 - 4ab) -$$

$$(3ax^2 - bx^2) - 4a(3a - b) - x^2(3a - b)$$

$$= (3a - b)(4a - x^2)$$

تبصره ۱- باید دانست که طریقهٔ دسته بندی در هر عبارت منحصر بیکی نیست و مثلاً در مثال اخیر عبارت مفروض را میتوان بطریق زیر دسته بندی کرد :

$$12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2 = (12a^2 - 3ax^2) - (4ab - bx^2)$$

$$= 3a(4a - x^2) - b(4a - x^2) = (4a - x^2)(3a - b)$$

تبصرهٔ ۲ - اگر تمام جمله های عبارت دارای عامل مشترکی باشند بهتر آنست که اول آنرا خارج کرده و سپس عبارت را دسته بندی نمائیم

مثال ۴- میخواهیم عبارت $2ax^4 - ax^3 + 4ax - 2a$ را تجزیه کنیم

$$2ax^4 - ax^3 + 4ax - 2a = a(2x^4 - x^3 + 4x - 2)$$

$$= a\left[(2x^4 - x^3) + (4x - 2)\right] = a\left[x^3(2x - 1) + 2(2x - 1)\right]$$

$$= a\left[(2x - 1)(x^3 + 2)\right] = a(2x - 1)(x^3 + 2)$$

تمرینات

عبارات زیر را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنید

۵۳۱ - $a^2 + ab + ac + bc$

۵۳۲ - $a^2 - ac + ab - bc$

۵۳۳ - $a^2 + 3a + ac + 3c$

۵۳۴ - $2x + cx + 2c + c^2$

۵۳۵ - $x^2 - ax + 5x - 5a$

۵۳۶ - $ab - by - ay + y^2$

۵۳۷ - $ax - bx - az + bz$

۵۳۸ - $pr + qr - ps - qs$

۵۳۹ - $mx - my - nx + ny$

۵۴۰ - $2ax + ay + 2bx + by$

۵۴۱ - $3ax - bx - 3ay + by$

۵۴۲ - $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

۵۴۳ - $ax^2 - 3bxy - axy + 3by^2$

۵۴۴ - $x^2 + mxy - 4xy - 4my^2$

۵۴۵ - $ax^2 + bx^2 + 2a + 2b$

۵۴۶ - $6bx^4 - 3x^3b + 12bx - 6b$

۵۴۷ - $3mx^3 + 5mx^2 + 3mx + 0$

۵۴۸ - $y^3 - y^2 + y - 1$

۵۴۹ - $axy + bcxy - az - bcz$

۵۵۰ - $f^2x^2+g^2x^2-ag^2-af^2$

۵۵۱ - $x^4+x^3+x^2+x$

۵۵۲ - $a^2b-abx+abx^2-a^2bx$

۵۵۳ - $2y^5+2y^4+2y^3+2y^2$

۵۵۴ - $a^2x+abx+ac+aby+b^2y+bc$

تعیین جذر و کعب عبارات جبری

۱۱۹ - **ریشهٔ عبارات یک جمله‌ای** - هرگاه n عدد صحیح و مثبتی باشد ریشهٔ n ام هر عبارت جبری عبارت جبری دیگری است که اگر آن را n مرتبه در خود آن ضرب نمائیم عبارت اوّلی حاصل شود

میدانیم که بنا بقاعدهٔ علامتها و آنچه در شمارهٔ ۱۰۵ گفته شد قوای زوج هر عدد اعم از مثبت و منفی عدد مثبت است و قوای فرد اعداد با خود آنها یک علامت دارد و از اینجا معلوم میشود که :

اوّلاً - ریشهٔ زوج اعداد مثبت ممکن است عدد مثبت یا عدد منفی باشد

ثانیاً - اعداد منفی دارای ریشهٔ زوج نیستند .

ثالثاً - ریشهٔ فرد هر عدد با خود آن عدد دارای یک علامت میباشد .

و بخصوص باید در نظر داشت که هر عدد مثبت دارای دو جذر است که از لحاظ مقدار مطلق متساوی و از لحاظ علامت مختلف اند مثلاً جذر ۴ مساوی ۲ ± است و جذر $9a^2x^6$ مساوی $\pm 3ax^3$ است و بهمین ترتیب

چون $(a^3b^2)^2=a^6b^4$ است پس $\sqrt{a^6b^4}=a^3b^2$

و $\sqrt[3]{-x^9}=-x^3$ است زیرا $(-x^3)^3=-x^9$

و $\sqrt[5]{c^{20}}=c^4$ زیرا $(c^4)^5=c^{20}$

و $\sqrt[4]{81x^{12}}=3x^3$ زیرا $(3x^3)^4=81x^{12}$.

از مثالهای فوق قاعدهٔ زیر برای تعیین ریشهٔ عبارات یک جمله ای بدست میاید

قاعده - ریشهٔ ضریب عددی عبارت را چنانکه در حساب معمول بود یافته و آنرا ضریب ریشه قرار میدهیم و مطابق قاعدهٔ علامتها علامت مناسبی برای آن قرار میدهیم سپس نمای هر عامل را در عبارت مزبور بر نماینده ریشه تقسیم می نمائیم تا نمای همان عامل در ریشه بدست آید

مثال $\sqrt{16x^8}=2x^2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-64x^6}=-4x^2$

$\sqrt[5]{-a^{10}b^{15}}=-a^2b^3$ و $\sqrt{\dfrac{81x^{10}}{25c^4}}=\dfrac{9x^5}{5c^2}$

تمرینات

مطلوب است محاسبهٔ :

۵۵۵- $\sqrt{4a^2b^4}$

۵۵۶- $\sqrt{9x^6y^2}$

۵۵۷- $\sqrt{16a^4b^2c^6}$

۵۵۸- $\sqrt{81a^6b^8}$

۵۵۹- $\sqrt{a^8b^2c^{12}}$

۵۶۰- $\sqrt{64x^6y^{18}}$

۵۶۱- $\sqrt{\frac{a^{16}b^8}{16}}$

۵۶۲- $\sqrt{\frac{289y^4}{25}}$

۵۶۳- $\sqrt{\frac{81a^{18}}{36b^{12}}}$

۵۶۴- $\sqrt{\frac{256x^2y^4}{289z^{14}}}$

۵۶۵- $\sqrt[3]{27a^6b^3c^3}$

۵۶۶- $\sqrt[3]{-8a^{12}b^9}$

۵۶۷ $\sqrt[3]{-\frac{x^{12}y^9}{125}}$

۵۶۸ $\sqrt[3]{\frac{125a^3b^6}{216x^6y^9}}$

۵۶۹ $\sqrt[7]{x^{14}y^{21}}$

۵۷۰ $\sqrt[5]{32x^5y^{10}}$

۵۷۱ $\sqrt[8]{256a^8x^{64}}$

۵۷۲ $\sqrt[5]{-x^{10}y^{15}}$

۱۲۰- **جذر عبارات جبری** - در شمارهٔ ۱۰۸ اتحادهای

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ و $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ را

دیدیم از روی این اتحادها معلوم میشود که هر عبارت جبری را که بصورت مجموع

مجذورات دو عبارت جبری دیگر بعلاوه یا منهای دو برابر حاصلضرب آنها باشد میتوان بصورت قوهٔ دوم مجموع یا تفاضل دو عبارت اخیر نوشت

مثال ۱- در عبارت $25x^2-40xy+16y^2$ دو جملهٔ اول و آخر عبارتند از مجذور $5x$ و $4y$ و $40xy$ دو برابر حاصلضرب $5x$ و $4y$ است پس داریم

$$25x^2-40xy+16y^2=(5x-4y)^2$$

مثال ۲- مطلوبست تعیین جذر عبارت $\frac{64}{9}\frac{a^2}{b^2}+4+\frac{32}{3}\frac{a}{b}$

$$\text{عبارت مفروض}=\left(\frac{8a}{3b}\right)^2+(2)^2+2\left(\frac{16a}{3b}\right)=$$

$$\left(\frac{8a}{3b}\right)^2+2\left(\frac{8a}{3b}\right)(2)+(2)^2=\left(\frac{8a}{3b}+2\right)^2$$

تبصره - در بسیاری از حالات عبارت مفروض ظاهراً بصورت مجموع قوه دوم دو عبارت باضافه یا منهای دو برابر حاصلضرب آنها نیست لیکن میتوان بسهولت یا با مختصر تاملی آنرا بصورت مزبور تبدیل کرد :

مثال ۳ - مطلوبست تعیین جذر عبارت $4a^2+b^2+c^2+4ab-4ac-2bc$

$$\text{عبارت مفروض}=4a^2+4ab-4ac+b^2-2bc+c^2=$$

$$4a^2+4a(b-c)+(b-c)^2=(2a)^2+2\times 2a(b-c)+(b-c)^2$$

$$=[2a+(b-c)]^2=(2a+b-c)^2$$

ونیز ممکن است همین عبارت رابصورت زیر نیز نوشت :

$$(2a)^2 + b^2 + c^2 + 2(2a)b - 2(2a)c - 2\times b\times c$$

که بموجب اتحاد شمارهٔ (۱۱۰) مجذور عبارت $2a+b-c$ میباشد

۱۲۱ - کعب عبارات جبری - از اتحادهای

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

$$(a-b)^3 = a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$$

که در شماره (۱۱۱) ثابت کردیم معلوم میشود که هر عبارت راکه بصورت فوق باشد (a و b میتوانند دو عبارت جبری اختیاری باشند) میتوان بصورت قوهٔ سوم مجموع یا تفاضل دو عبارت تبدیل کرد

مثال ۱ - مطلوب است کعب عبارت $x^3+6x^2+12x+8$

عبارت مفروض $= (x)^3+(2)^3+3(2)(x)^2+3(2)^2x=(x+2)^3$

مثال ۲ - مطلوب است تعیین کعب عبارت $8x^3-4x^2y^2+\frac{2}{3}xy^4-\frac{y^6}{27}$

چون که $8x^3$ مکعب $2x$ و $\frac{y^6}{27}$ مکعب $\frac{y^2}{3}$ است و بالاخره $4x^2y^2$ و $\frac{2}{3}xy^4$ بترتیب سه برابر مجذور $2x$ در $\frac{y^2}{3}$ وسه برابر مجذور $\frac{y^2}{3}$ در $2x$ میباشند پس داریم

$$8x^3-4x^2y^2+\frac{2}{3}xy^4-\frac{y^6}{27}=(2x-\frac{y^2}{3})^3$$



تمرینات

جذر عبارات زیر را بدست آورید :

۵۷۳ - $x^2+4xy+4y^2$

۵۷۴ - $9a^2+12ab+4b^2$

۵۷۵ - $4x^2-12xy+9y^2$

۵۷۶ - $81x^2+18xy+y^2$

۵۷۷ - $25x^2-30xy+9y^2$

۵۷۸ - $1-2a^3+a^6$

۵۷۹ - $a^4-2a^3+3a^2-2a+1$

۵۸۰ - $4x^4-12x^3+29x^2-30x+25$

۵۸۱ - $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

۵۸۲ - $4a^4+4a^3-7a^2-4a+4$

۵۸۳ - $1-10x+27x^2-10x^3+x^4$

۵۸۴ - $4-\frac{4x}{y}+\frac{x^2}{y^2}$

۵۸۵ - $\frac{x^2}{25}+\frac{2xy}{5}+y^2$

۵۸۶ - $\frac{x^2}{y^2}+\frac{10x}{y}+25$

-۵۸۷ $\frac{x^2}{y^2} - \frac{2ax}{by} + \frac{a^2}{b^2}$

-۵۸۸ $\frac{64x^2}{9y^2} + \frac{32x}{3y} + 4$

-۵۸۹ $\frac{9x^2}{25} - 2 + \frac{25}{9x^2}$

-۵۹۰ $x^4 + 2x^3 - x + \frac{1}{4}$

کعب عبارات زیر را بدست آورید

-۵۹۱ $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

-۵۹۲ $8m^3 - 12m^2 + 6m - 1$

-۵۹۳ $64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3$

-۵۹۴ $54 - 27x^3 + \frac{8}{x^6} - \frac{36}{x^3}$

-۵۹۵ $\frac{x^3}{27} + \frac{2x^2}{3} + 4x + 8$

-۵۹۶ $\frac{27x^3}{64y^3} - \frac{27x^2}{8y^2} + \frac{9x}{y} - 8$

-۵۹۷ $\frac{x^6}{y^3} - 6x^4 + 12x^2y^3 - 8y^6$

عبارات زیر را بحاصلضرب عاملها تجزیه کنید

-۵۹۸ $28mx^2 + 63m^2b^2 - 84mxb$

-۵۹۹ $2a^5 - 2a^4 + 2a^3 - 2a2$

۶۰۰ $6atr + 6bt - 10ats - 10bts$

---

۱۲۲ - تجزیهٔ عباراتیکه بصورت تفاضل دو مجذور کامل میباشند

در شمارهٔ (۱۱۳) اتحاد $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ را دیدیم بالعکس میتوان گفت

تفاضل مجذورات دو عبارت جبری را میتوان بمجموع آن دو عبارت در تفاضل همان دو عبارت تجزیه کرد (دو عبارت بصورت $a+b$ و $a-b$ را مزدوج یکدیگر گویند)

مثال ۱- عبارت $4a^2b^2 - 9$ را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنید

چون $4a^2b^2$ مجذور $2ab$ و ۹ مجذور ۳ است پس داریم

$$4a^2b^2 - 9 = (2ab+3)(2ab-3)$$

مثال ۲- عبارت $25x^2 - 16y^2$ را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنید:

$$25x^2 - 16y^2 = (5x)^2 - (4y)^2 = (5x-4y)(5x+4y)$$

مثال ۳- مطلوب است محاسبهٔ $(329)^2 - (171)^2$ بنا باتحاد فوق عبارت مزبور را میتوان چنین نوشت:

$$(329+171)(329-171) = 500 \times 158 = 79000$$

۱۲۳- در بسیاری از حالات هریک از دو مجذور کامل عبارت از یک چندجمله‌ای میباشند و در اینحالت طریقهٔ عمل همان است که در فوق دیدیم:

مثال ۴ - میخواهیم عبارت $(a+2b)^2-16x^2$ را تجزیه کنیم

$$(a+2b)^2-16x^2=[(a+2b)+4x][(a+2b)-4x]$$

$$=(a+2b+4x)(a+2b-4x)$$

مثال ۵ - $(3x+7y)^2-(2x-3y)^2=$

$$(3x+7y+2x-3y)(3x+7y-2x+3y)=$$

$$(5x+4y)(x+10y)$$

۱۲۴ - در بسیاری از حالات عبارت تجزیه شدنی مستقیماً بصورت تفاضل دو مجذور کامل نیست بلکه باید آن را بصورت مزبور تبدیل کرد :

مثال ۶ - مطلوب است تجزیه عبارت $a^2-2ax+x^2-4b^2$

$$a^2-2ax+x^2-4b^2=(a^2-2ax+x^2)-4b^2=$$

$$(a-x)^2-4b^2=(a-x-2b)(a-x+2b)$$

مثال ۷ - مطلوبست تجزیه عبارت $2bd-a^2-c^2+b^2+d^2+2ac$

عبارت مفروض $=(b^2+d^2+2bd)-(a^2-2ac+c^2)$

$$=(b+d)^2-(a-c)^2$$ ۱۰۱

$$=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

مثال ۸ - مطلوب است تجزیه عبارت $x^4+x^2y^2+y^4$

عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+y^2+xy)\times(x^2+y^2-xy)$$

تمرینات

عبارات زیر را بحاصلضرب عاملها تجزیه نمائید

۶۰۱ - x^2-4 ، ۶۰۲ - a^2-81

۶۰۳ - y^2-100 ، ۶۰۴ - $49-c^2$

۶۰۵ - $121-x^2$ ، ۶۰۶ - $400-a^2$

۶۰۷ - x^2-9a^2 ، ۶۰۸ - $9x^2-1$

۶۰۹ - $36p^2-49q^2$ ، ۶۱۰ - $4K^2-1$

۶۱۱ - $49-100K^2$ ، ۶۱۲ - $9x^2-y^2$

۶۱۳ - p^2q^2-36 ، ۶۱۴ - $a^2b^2-4c^2d^2$

۶۱۵ - x^4-9 ، ۶۱۶ - $81a^4-49x^4$

۶۱۷ - x^6-25 ، ۶۱۸ - $1-36a^6$

۶۱۹ - $9x^4-a^2$ ، ۶۲۰ - a^2-64x^6

۶۲۱ - $a^2b^2-9x^6$ ۶۲۲ - x^6y^6-4

مطلوب است محاسبهٔ :

۶۲۳ - $(575)^2-(425)^2$ ۶۲۴ - $(121)^2-(120)^2$

۶۲۵ - $(750)^2-(250)^2$ ۶۲۶ - $(339)^2-(319)^2$

۶۲۷ - $(1723)^2-(277)^2$

عبارات زیر را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنید

۶۲۸ - $(a+b)^2-c^2$ ۶۲۹ - $(a-b)^2-c^2$

۶۳۰ - $(x+y)^2-4z^2$ ۶۳۱ - $(x+2y)^2-a^2$

۶۳۲ - $(x+5a)^2-9y^2$ ۶۳۳ - $(x+5c)^2-1$

۶۳۴ - $(2x-3a)^2-9c^2$ ۶۳۵ - $a^2-(b-c)^2$

۶۳۶ - $4a^2-(y-z)^2$ ۶۳۷ - $9x^2-(2a-3b)^2$

۶۳۸ - $1-(a-b)^2$ ۶۳۹ - $c^2-(5a-3b)^2$

۶۴۰ - $(7x+y)^2-1$ ۶۴۱ - $x^2-(y-x)^2$

۶۴۲ - $(x+3y)^2-4y^2$ ۶۴۳ - $(5x+2y)^2-(3x-y)^2$

۶۴۴ - $9x^2-(3x-5y)^2$ ۶۴۵ - $(3a+1)^2-(2a-1)^2$

۶۴۶ - $16a^2-(3a+1)^2$ ۶۴۷ - $(x-7y-z)^2-(7y-z)^2$

۶۴۸ - $(x+y-8)^2-(x-8)^2$ ۶۴۹ - $x^2+2xy+y^2-a^2$

۶۵۰ - $a^2-2ab+b^2-x^2$ ۶۵۱ - $4a^2+4ab+b^2-9c^2$

۶۵۲ - $x^2+a^2+2ax-y^2$ ۶۵۳ - $x^2-a^2-2ab-b^2$

۶۵۴ - $y^2-c^2-x^2+2cx$ ۶۵۵ - $c^2-x^2-y^2+2xy$

۶۵۶ - $x^2+y^2+2xy-4x^2y^2$ ۶۵۷ - $x^2+2xy+y^2-a^2-b^2-2ab$

۶۵۸ - $a^2-2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$ ۶۵۹ - $x^2-2x+1-a^2-2ab-4b^2$

۶۶۰ - $a^4+a^2b^2+b^4$ ۶۶۱ - $x^4+4x^2y^2+16y^4$

۶۶۲ - $c^4+3c^2d^2+4d^4$ ۶۶۳ - $x^4+y^4-11x^2y^2$

---

۱۲۵ - تجزیه عباراتیکه بصورت مجموع یا تفاضل دو مکعّب کامل میباشند

درشمارهٔ ۱۱۵ دو اتحاد زیر را دیده‌ایم

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b)$$

و

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

واز این دو اتحاد معلوم میشود که هر عبارت جبری که بصورت مجموع یا تفاضل دو مکعّب کامل باشد قابل تجزیه بحاصلضرب عاملهای اوّل میباشد

مثال ۱ -

$$8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$$

$$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$$

مثال ۲ -

$$64a^3+1=(4a)^3+1^3=(4a+1)(16a+1-4a)$$

مثال ۳ - $۸x^۹ + ۷۲۹ = (۲x^۳ + ۹)(۴x^۶ - ۱۸x^۳ + ۸۱)$

تمرینات

میخواهیم عبارات زیر را بحاصلضرب عاملهای اول تجزیه کنیم

۶۶۴ - $x^۳ - y^۳$ ۶۶۵ - $x^۳ + y^۳$

۶۶۶ - $x^۳ - ۱$ ۶۶۷ - $۱ + a^۳$

۶۶۸ - $۸x^۳ - y^۳$ ۶۶۹ - $۱ - ۸y^۳$

۶۷۰ - $a^۳b^۳ - c^۳$ ۶۷۱ - $۸x^۳ + ۲۷y^۳$

۶۷۲ - $۱ - ۳۴۳x^۳$ ۶۷۳ - $۱۲۵ + a^۳$

۶۷۴ - $۲۱۶ - a^۳$ ۶۷۵ - $۱۰۰۰y^۳ - ۱$

۶۷۶ - $p^۳q^۳ - ۲۷x^۳$

---

۱۲۶ - **تجزیه سه جمله ای درجهٔ دوم** - سه جمله ای درجهٔ دوّم عبارتی است بصورت $x^۲ + px + q$ و برای تجزیه آن بحاصلضرب عاملهای اوّل میتوان یکی از دو راه زیر را بکار برد :

۱ه اوّل - در شماره های ۶۲ و ۱۱۴ اتّحاد زیر را ثابت کرده ایم

$$(x + a)(x + b) = x^۲ + (a + b)x + ab$$

این اتّحاد معلوم میشود که سه جمله ای $x^۲ + px + q$ را در صورتی میتوان

بحاصلضرب عبارات درجهٔ اوّل تجزیه نمود که p مجموع جبری دو عدد و q حاصلضرب همان دو عدد باشد

مثال ۱ - مطلوب است تجزیه عبارت $x^۲ - ۱۰x + ۲۴$

باید دو عدد a و b یافت بطوریکه $a + b = -۱۰$ و $a \times b = ۲۴$ باشد

چون حاصلضرب این دو عدد مثبت است علامت هر دو آنها یکی است و چون مجموع آنها منفی است پس هر دو آنها منفی هستند امّا ۲۴ را میتوان $(-۱) \times (-۲۴)$ یا $(-۱۲) \times (-۲)$ و $(-۸) \times (-۳)$ و یا $(-۶) \times (-۴)$ دانست

و مابین این اعداد فقط ۴- و ۶- هستند که مجموع آنها ۱۰- است پس

$$(x^۲ - ۱۰x + ۲۴) = (x - ۴)(x - ۶)$$

مثال ۲ - میخواهیم عبارت $x^۲ + ۲x - ۳۵$ را تجزیه کنیم .

در اینجا باید دو عدد a و b یافت بطوریکه حاصلضرب آنها ۳۵- و مجموع جبری آنها ۲ باشد

امّا $-۳۵ = ۱ \times (-۳۵) = (۳۵) \times (-۱) = ۷ \times (-۵) = ۵ \times (-۷)$

و فقط ۷ و ۵- هستند که مجموع آنها ۲ است پس

$$x^۲ + ۲x - ۳۵ = (x + ۷)(x - ۵)$$

راه دوّم - میتوان سه جمله‌ای درجهٔ دوّم را بصورت تفاضل دو مجذور کامل درآورد

مثال ۳ - مطلوب است تجزیهٔ سه جمله‌ای درجهٔ دوّم x^2+6x+5

برای تجزیه ملاحظه مینمائیم که سه جمله‌ای مفروض را میتوان چنین نوشت

$$x^2+6x+9-9+5=(x^2+6x+9)-4$$

$$=(x+3)^2-4=(x+3+2)(x+3-2)$$

$$=(x+5)(x+1)$$

مثال ۴ - مطلوب است تجزیهٔ سه جمله‌ای z^2-4z-5

سه جمله‌ای مفروض را میتوان چنین نوشت

$$z^2-4z+4-4-5=(z-2)-9=$$

$$(z-2-3)(z-2+3)=(z-5)(z+1)$$

تبصره - از دو مثال فوق معلوم میشود که در این طریقه همواره عددی بر سه جمله‌ای اضافه کرده همان را از سه جمله‌ای کم می‌کنیم و این عدد طوری اختیار میشود که مجموع آن با دو جملهٔ درجهٔ دوّم و درجهٔ اوّل یک مجذور کامل پدید آورد

تمرینات

میخواهیم عبارات درجهٔ دوّم زیر را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنیم

-۶۷۷ a^2+3a+2

-۶۷۸ a^2+2a+1

-۶۷۹ $a^2+7a+12$

-۶۸۰ $x^2-15x+56$

-۶۸۱ $x^2+19x+90$

-۶۸۲ $x^2+13x+42$

-۶۸۳ $x^2+13x+40$

-۶۸۴ $x^2-21x+80$

-۶۸۵ $a^2-14ab+49b^2$

-۶۸۶ $a^2+5ab+6b^2$

-۶۸۷ $m^2-22mn+105n^2$

-۶۸۸ x^2-x-2

-۶۸۹ x^2-x-6

-۶۹۰ x^2+x-6

-۶۹۱ $x^2+3x-40$

-۶۹۲ $a^4-x^2b^2-56b^4$

-۶۹۳ $y^4+6x^2y^2-27x^4$

-۶۹۴ $a^2b^2-3abc-10c^2$

-۶۹۵ $a^2-18axy-243x^2y^2$

-۶۹۶ $x^4+13a^2x^2-300a^4$

-۶۹۷ $x^4-a^2x^2-462a^4$

-۶۹۸ x^6+x^3-870

میخواهیم عبارات زیر را بحاصلضرب عوامل تجزیه کنیم (در تجزیهٔ این عبارات غالب قاعده‌های فوق بکار میروند)

-۶۹۹ $16a^4-81b^4$

-۷۰۰ x^6-y^6

-۷۰۱ x^6-64

-۷۰۲ $729y-64x^6$

-۷۰۳ x^8-1

-۷۰۴ $a^8x^6-64a^2y^6$

-۷۰۵ $a^{12}-b^{12}$

-۷۰۶ a^3b^3+512

-۷۰۷ $2x^2+17x+35$

-۷۰۸ $500x^2y-20y^3$

-۷۰۹ $1-(x-y)^2$ -۷۱۰ $a^2-22a-279$

-۷۱۱ $250(a-b)^3+2$ -۷۱۲ $8(x+y)^3-(2x-y)^3$

-۷۱۳ x^2-4y^2+x-2y -۷۱۴ a^2-b^2+a-b

-۷۱۵ $(a+b)^2+a+b$ -۷۱۶ a^3+b^3+a+b

-۷۱۷ a^2-9b^2+a+3b -۷۱۸ $4(x-y)^3-(x-y)$

-۷۱۹ $28x^4y+64x^3y-60x^2y$ -۷۲۰ $4x^2-25y^2+2x+5y$

بعضی از موارد استعمال تجزیه عبارات بحاصل ضرب عوامل اوّل

I - حلّ معادلات بوسیلهٔ تجزیه

۱۲۷- میدانیم که اگر در حاصل ضرب چند عامل یکی از آنها صفر باشد مقدار سایرین هرچه باشد حاصل مساوی صفر است $2\times 3\times 0\times 5=0$ بالعکس اگر حاصلضرب چند عامل مساوی صفر باشد لااقل یکی از آنها مساوی صفر میباشد بکمک این دستور کلّی میتوان بسیاری از معادلات بالاتر از درجهٔ اول را بوسیلهٔ تجزیه حل کرد

مثال ۱- مطلوبست حلّ معادله $x^2-x=0$

حلّ- طرف اوّل معادله رامیتوان بصورت $x(x-1)$ تجزیه نمود پس

$x(x-1)=0$ و بنا باصل فوق یا $x=0$ و یا $x-1=0$ است یعنی $x=1$ پس معادلهٔ فوق دارای دو جواب $x=0$ و $x=1$ میباشد

مثال ۲- مطلوبست حلّ معادله $(x-4)(2x-3)(x+5)=0$ بنا باصل فوق یکی از سه عامل $x-4$ یا $2x-3$ یا $x+5$ باید صفر باشد پس یا $x=4$ و یا $2x=3$ یعنی $x=\frac{3}{2}$ و یا $x=-5$ است.

معادلهٔ فوق دارای سه جواب $x=4$ و $x=\frac{3}{2}$ و $x=-5$ میباشد

مثال ۳- مطلوبست حلّ معادلهٔ

$$(x+2)(2x-17)+(x+2)(x+4)-(x+2)(3x-30)=0$$

حلّ- برای حلّ این معادله طرف اوّل را بحاصلضرب عوامل اوّل تجزیه مینمائیم یعنی $x+2$ راکه در تمام جمله ها مشترک است فاکتور قرار میدهیم حاصل میشود

$$(x+2)(2x-17+x+4-3x+30)=0$$

یا

$$(x+2)(17)=0$$

چون ۱۷ نمیتواند صفر باشد ناچار $x+2=0$ یا $x=-2$ است

تبصرهٔ مهم - اگر در معادلهٔ فوق طرفین را بر عامل $x+2$ تقسیم میکردیم حاصل میشد $2x-17\ x+4-3x+30=0$ و یا پس از خلاصه کردن حاصل میشود

$0=17$ واین محال است وظاهراً بنظر میرسد که معادلهٔ فوق غیر ممکن است وحال آنکه دیده‌ایم این معادله دارای ریشه $x=-2$ میباشد پس علت پیدا شدن این نتیجهٔ غیر عادی واز بین رفتن جواب معادله آنست که طرفین را بر $x+2$ تقسیم کرده‌ایم .»

واضح است که اگر طرفین معادلهٔ مثال (۲) را نیز بر یکی از عوامل تقسیم میکردیم یکی از ریشه های معادله از بین میرفت واز اینجا نتیجهٔ مهم زیر حاصل میشود

هرگاه طرفین معادله‌ای دارای عواملی باشند که شامل مجهول معادله باشد نباید طرفین را بر آن عامل تقسیم کرد زیرا ممکن است یک یا چند ریشهٔ معادله از بین برود مگر آنکه مطمئن باشیم که عامل مفروض بازاء هیچ مقدار از مجهول صفر نمیشود بهمین استدلال معلوم میشود که هیچوقت نباید طرفین معادله را در عاملی که شامل مجهول بوده بازاء بعضی مقادیر از مجهول صفر میشود ضرب کرد زیرا ریشه هائی پیدا میشوند که در واقع ریشهٔ معادلهٔ مفروض نبوده‌اند

قاعده - برای حل معادله ها بوسیلهٔ تجزیه باید تمام جمله ها را بیکطرف تساوی نقل داده حاصل را بحاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد سپس هریک از عوامل اول را که شامل مجهول هستند مساوی صفر قرار داده جواب آنها را معین کرد تا همهٔ جوابهای

معادله بدست آیند

مثال ۴ - حل معادلهٔ $x^2-9=3x+9$.

تمام جمله ها را بیکطرف انتقال میدهیم حاصل میشود $x^2-9-3x-9=0$

یا $(x-3)(x+3)-3(x+3)=0$

وچون $x+3$ را عامل مشترک قرار دهیم حاصل میشود

$$(x+3)(x-3-3)=0$$

یا $(x+3)(x-6)=0$ پس یا $x+3=0$ است یعنی $x=-3$

ویا $x-6=0$ است یعنی $x=6$

تمرینات

معادلات زیر را بوسیلهٔ تجزیه حل نمائید :

۷۲۱- $x(x-2)=0$

۷۲۲- $a(2a-5)=0$

۷۲۳- $4x^2-5x=6$

۷۲۴- $3x^2+2x=33$

۷۲۵- $y+\frac{9}{y}=6$

۷۲۶- $y+\frac{1}{y}=\frac{8}{3}$

۷۲۷- $x^2-1=(x-1)(x+3)$

۷۲۸- $(x-a^2)+(x-a)=0$

۷۲۹- $x^3+x^2+x+1=0$

۷۳۰- $x^3-ax^2=9b^2x-9ab^2$

۷۳۱- $x^2-ax=bx-ab$

II - بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عبارات جبری

۱۲۸ - بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات جبری - در شماره ۹۱ بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات جبری را تعریف کرده طریقه تعیین آن را در مورد عبارات ساده دیدیم . حال میگوئیم که برای تعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک هر عبارت جبری میتوان قاعده ای مشابه قاعده مذکور در شمارهٔ (۹۲) را بکار برد باین معنی که تمام عبارات را که مقصود تعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک آنها است بحاصلضرب عاملهای اول تجزیه مینمائیم سپس عاملهائی را که در تمام عبارات مزبور مشترک اند با کوچکترین نمائی که در آن عبارات دارا میباشند اختیار کرده آنها را در یکدیگر ضرب مینمائیم تا بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک مطلوب بدست آید .

مثال ۱ - مطلوب است تعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات $4cx^3$ و $2cx^3+4c^2x^2$

$2cx^3+4c^2x^2=2cx^2(x+2c)$ و $4cx^3=2^2cx^3$ و ملاحظه میشود که بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات مفروض $2cx^2$ است

مثال ۲ - مطلوب است تعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات

$3a^2+9ab$ و a^3-9ab^2 و $a^3+6a^2b+9ab^2$

داریم $3a^2+9ab=3a(a+3b)$

و $a^3-9ab^2=a(a^2-9b^2)=a(a-3b)(a+3b)$

و نیز $a^3+6a^2b+9ab^2=a(a^2+6ab+9b^2)$

$=a(a+3b)^2$

و بسهولت ملاحظه میشود که بزرگترین عامل مشترک در تمام عبارات فوق $a(a+3b)$ است .

مثال ۳ - مطلوبست تعیین بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات $x(a-x)^2$ و $a(a-x)^3$ و $2ax(a-x)^5$ و $(a-x)^2$ ؛

این عبارات همه بصورت عاملهای اول تجزیه شده اند و بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک آنها $(a-x)^2$ است

۱۲۹ - کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت جبری - در شماره های ۹۴ و ۹۵ تعریف کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت و طریقهٔ تعیین آنرا در مورد عبارات ساده ذکر نمودیم اکنون متذکر میشویم که در مورد تعیین کوچکترین مضرب مشترک عبارات چند جمله ای نیز میتوان قاعده ای مشابه با قاعدهٔ مزبوره بکار برد باین معنی که تمام عبارات مفروض را بحاصلضرب عوامل اول تجزیه کرده سپس عاملهای مشترک و غیر مشترک را

با بزرگترین نماینده‌ای که در عبارات مزبور دارند در یکدیگر ضرب مینمائیم تا کوچکترین مضرب مشترک مطلوب بدست آید

مثال - مطلوب است تعیین کوچکترین مضرب مشترک عبارات

$3a^2+9ab$ ، $2a^3-18ab^2$ و $a^3+6a^2b+9ab^2$:

عبارات مزبور را بحاصلضرب عوامل اول تجزیه مینمائیم تا حاصل شود :

$$3a^2+9ab=3a(a+3b)$$

$$2a^3-18ab^2=2a(a^2-9b^2)=2a(a-3b)(a+3b)$$

$$a^3+6a^2b+9ab^2=a(a^2+6ab+9b^2)=a(a+3b)^2$$

وبسهولت معلوم میشود که کوچکترین مضرب مشترک عبارات مفروض

$6a(a+3b)^2(a-3b)$ میباشد

تمرینات

بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک عبارات زیر را معین نمائید

-۷۳۲ a^2+ab و a^2-b^2

-۷۳۳ $(x+y)^2$ و x^2-y^2

-۷۳۴ $6x^2-9xy$ و $4x^2-9y^2$

-۷۳۵ x^3+x^2y و x^3+y^3

-۷۳۶ a^3-a^2x و a^3-ax^2 و a^4-ax^3

-۷۳۷ a^2-4x^2 و a^2+2ax

-۷۳۸ $2x^2y-6xy^2$ و x^2-9y^2

-۷۳۹ a^2-x^2 ، a^2-ax و a^2x-ax^2

-۷۴۰ $20x-4$ و $50x^2-2$

-۷۴۱ $6bx+4by$ و $9cx+6cy$

-۷۴۲ $xy-y$ و x^4y-xy

-۷۴۳ $x^2-2xy+y^2$ و $(x-y)^3$

-۷۴۴ x^3+8y^3 و $x^2+xy-2y^2$

-۷۴۵ x^4-27a^3x و $(x-3a)^2$

-۷۴۶ x^2-x-20 و $x^2-9x+20$

-۷۴۷ $x^2-18x+45$ و x^2-9

-۷۴۸ $12x^2+x-1$ و $15x^2+8x+1$

-۷۴۹ $2x^2-x-1$ و $3x^2-x-2$

-۷۵۰ x^5-xy^2 ، $x^3+x^2y+xy+y^2$

-۷۵۱ $2x^2+9x+4$ ، $2x^2+11x+5$ و $2x^2-3x-2$

کوچکترین مضرب مشترک عبارات زیر را معین نمائید

-۷۵۲ x و x^2+x -۷۵۳ x^2 و x^2-3x

۷۵۴ - $۷x^۲(x+۱)$ و $۲۱x^۳$ ۷۵۵ - $x^۲-۱$ و $x^۲+x$

۷۵۶ - $۴x^۲y-y$ و $۲x^۲+x$

۷۵۷ - $۶x^۲-۲x$ و $۹x^۲-۳x$

۷۵۸ - $x^۲-۳x+۲$ و $x-۱$

۷۵۹ - $x^۲+۴x+۴$ و $x^۲+۵x+۶$

۷۶۰ - $x^۲-x-۶$ و $x^۲+x-۲$ و $x^۲-۴x+۳$

۷۶۱ - $x^۲+x-۴۲$ و $x^۲-۱۱x+۳۰$ و $x^۲+۲x-۳۵$

۷۶۲ - $m^۴+m^۲n^۲+n^۴$ و $m^۳n+n^۴$ و $(m^۲-mn)^۳$

۷۶۳ - $(۲c^۲-۳cd)^۲$ و $(۴c-۶d)^۳$ و $۸c^۳-۲۷d^۳$

فصل دوازدهم - کسرها

۱۳۰ - در شمارهٔ ۹۶ تعریف کسر را ذکر کرده اجرای اعمال اصلی را در مورد ساده‌ترین کسرها بطریقی که در حساب معمول بود شرح دادیم اکنون دلیل این اعمال را توضیح داده ثابت میکنیم که میتوان آنها را در مورد کسرهای جبری نیز بکار برد

۱۳۱ - همچنانکه در شمارهٔ ۹۶ گفته شد اگر کمیت ه را به b قسمت متساوی تقسیم کرده a قسمت از آنها را انتخاب نمائیم حاصل را کسر $\frac{a}{b}$ از کمیت ه مینامند و در حالتیکه ه مساوی واحد باشد مقدار حاصل را مطلقاً کسر $\frac{a}{b}$ مینامند از این تعریف چنین نتیجه میشود که a و b باید اعداد صحیح و مثبت باشند لیکن در شماره (۱۳۵) تعریف کلی‌تری از کسر ذکر مینمائیم که مثبت و صحیح بودن a و b را ایجاب نمی نماید

۱۳۲ - میخواهیم ثابت کنیم که $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$ (m و a و b اعداد صحیح و مثبت هستند) :

کسر $\frac{a}{b}$ چنین میفهماند که واحد را به b قسمت متساوی تقسیم کرده a قسمت آنرا اختیار کرده‌ایم .

کسر $\frac{ma}{mb}$ چنین میفهماند که واحد را به mb قسمت مساوی تقسیم کرده ma قسمت آنرا اختیار نموده‌ایم

واضح است که تقسیمات دفعهٔ دوّم هرکدام m بار از تقسیمات اوّلی کوچکترند پس a قسمت از دفعهٔ اوّل مساوی am قسمت از دفعهٔ دوّم و b قسمت از دفعهٔ اوّل مساوی mb قسمت از دفعهٔ دوّم است و بنابراین :

$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$ یعنی هرگاه صورت و مخرج کسری را بر یک مقدار تقسیم کرده. یا در یک مقدار ضرب نمائیم در مقدار کسر تغییری حاصل نمیشود

۱۳۳ - تبدیل کسر بساده ترین صورت خود - چنانکه میدانیم اگر صورت و مخرج کسری را بر عامل مشترکی تقسیم نمائیم در مقدار کسر تغییری حاصل نمیشود. هرگاه عامل مشترک مزبور بزرگترین مقسومٌ علیه مشترک صورت و مخرج باشد کسر بساده ترین صورت تبدیل میشود

مثال ۱- کسر $\frac{24a^3c^2x^2}{18a^3x^2-12a^2x^3}$ را بساده ترین صورت خلاصه نمائید:

عبارت مفروض $= \frac{24a^3c^2x^2}{6a^2x^2(3a-2x)} = \frac{4ac^2}{3a-2x}$

مثال ۲- کسر $\frac{6x^2-8xy}{9xy-12y^2}$ را بساده ترین صورت تبدیل نمائید:

کسر مفروض $\frac{2x(3x-4y)}{3y(3x-4y)} = \frac{2x}{3y}$

تمرینات

کسرهای زیر را خلاصه نمائید

۷۶۴- $\frac{3a^2-6ab}{2a^2b-4ab^2}$

۷۶۵- $\frac{abx+bx^2}{acx+cx^2}$

۷۶۶- $\frac{ax}{a^2x^2-ax}$

۷۶۷- $\frac{4x^2-9y^2}{4x^2+6xy}$

۷۶۸- $\frac{20(x^3-y^3)}{5x^2+5xy+5y^2}$

۷۶۹- $\frac{x(2a^2-3ax)}{a(4a^2x-9x^3)}$

۷۷۰- $\frac{(xy-3y^2)^2}{x^3y^2-27y^5}$

۷۷۱- $\frac{x^2-5x}{x^2-4x-5}$

۷۷۲- $\frac{3x^2+6x}{x^2+4x+4}$

۷۷۳- $\frac{x^3y+2x^2y+4xy}{x^3-8}$

۷۷۴- $\frac{x^4-14x^2-51}{x^4-2x^2-15}$

۷۷۵- $\frac{x^2+xy-2y^2}{x^3-y^3}$

۷۷۶- $\frac{2x^2+17x+21}{3x^2+26x+35}$

۷۷۷- $\frac{3x^2+23x+14}{3x^2+41x+26}$

۷۷۸- $\frac{27a+a^4}{18a-6a^2+2a^3}$

ضرب و تقسیم کسرها

۱۳۴- قاعده - برای ضرب یک عدد صحیح در یک کسر باید آن عدد صحیح را در صورت کسر ضرب کرد و یا در صورت امکان مخرج کسر را بر آن عدد صحیح تقسیم نمود :

معنی کسر $\frac{a}{b}$ آنست که واحد را به b قسمت مساوی تقسیم کرده a قسمت از آنرا

اختیار نموده‌ایم و مفهوم کسر $\frac{ac}{b}$ آنست که واحد را به b قسمت متساوی تقسیم کرده ac قسمت از آنرا اختیار کرده‌ایم بنابراین تعداد قسمتها در دفعهٔ دوم c برابر دفعهٔ اول است یعنی کسر دومی c برابر اولی میباشد یعنی $\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \times c$ حال فرض کنیم میخواهیم کسری را در عدد d ضرب نمائیم و مخرج کسر بر d قابل قسمت است پس $\frac{a}{bd} \times d = \frac{ad}{bd}$ و بموجب شمارهٔ (۱۳۲) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ یعنی میتوان برای ضرب عددی در یک کسر مخرج کسر را بر آن عدد تقسیم نمود

۱۳۵ - بنابرآنچه در شماره های ۱۳۲ و ۱۳۴ گفتیم $\frac{a}{b} \times b = \frac{ab}{b} = a$ از اینجا معلوم میشود که کسر $\frac{a}{b}$ مقداری است که هرگاه آن را در b ضرب نمائید a حاصل میشود و بموجب شماره (۶۳) خارج قسمت دو عدد نیز همین تعریف را دارا بود بنابراین میتوان گفت : کسر $\frac{a}{b}$ عبارتست از خارج قسمت تقسیم عدد a بر عدد b

چون در جبر عمل تقسیم منحصر باعداد مثبت نیست و میتوان هر دو عبارت جبری اختیاری را بر یکدیگر تقسیم کرد بنابر تعریف جدید کسر لازم نیست که صورت و مخرج کسر حتماً اعداد صحیح یا مثبت باشند

۱۳۶ - بعضی از خواص کسر - بموجب تعریف جدید کسر مفهوم کسر $\frac{-a}{-b}$ عبارتست از حاصل تقسیم $-a$ بر $-b$ و بموجب قاعدهٔ علامتها میتوان a را بر b تقسیم کرده علامت + بر آن مقدم داشت و مفهوم کسر $\frac{-a}{b}$ عبارتست از خارج قسمت تقسیم $-a$ بر b و بنابراین میتوان a را بر b تقسیم کرده علامت - بر خارج قسمت مقدم نمود و نیز مفهوم $\frac{a}{-b}$ عبارتست از حاصل تقسیم a بر $-b$ و برای اینکار نیز میتوان a را بر b تقسیم کرده علامت - مقابل خارج قسمت قرار داد پس داریم $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ و از اینجا قاعدهٔ زیر نتیجه میشود :

قاعده - اولاً هرگاه علامت صورت و مخرج یک کسر هر دو را تغییر دهیم در مقدار کسر تغییری حاصل نمیشود ثانیاً هرگاه علامت صورت یا مخرج را تنهائی تغییر دهیم علامت کسر تغییر مینماید

میدانیم برای آنکه علامت صورت یا مخرج کسری را تغییر دهیم باید علامت تمام جمله‌های آنها را یکی یکی تغییر داد پس میتوان گفت : هرگاه علامت تمام جمله های صورت و مخرج کسری را تغییر دهیم مقدار کسر تغییر نمینماید لیکن اگر علامت جمله های صورت یا مخرج را تنهائی تغییر دهیم علامت کسر تغییر میکند :

مثال - $\frac{b-a}{y-x} = \frac{-b+a}{-y+x} = \frac{a-b}{x-y}$

ونیز $\frac{3x}{4-x^2} = -\frac{3x}{-4+x^2} = \frac{3x}{x^2-4}$

۱۳۷- قاعدهٔ ضرب دو کسر در یکدیگر - برای ضرب دو کسر در یکدیگر کافی است صورتها را درهم و مخرجها را درهم ضرب کنیم و آنها را مرتباً صورت و مخرج کسر حاصلضرب قرار دهیم .

فرض کنیم مقصود ضرب دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در یکدیگر باشد چون بنابر آنچه گفته ایم هر کسر عبارت از خارج قسمت کامل صورت بر مخرج است پس اگر $\frac{a}{b} = q$ و $\frac{c}{d} = q'$ فرض شود بموجب تعریف تقسیم $a = bq$ و $c = dq'$ است

و از ضرب این دو رابطه عضو بعضو حاصل میشود $ac = bdqq'$

و یا $qq' = q \times q' = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

واضحست که برای ضرب چندین کسر در یکدیگر نیز میتوان همین قاعده را بکار برد پس

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \cdots = \frac{ace\cdots}{bdf\cdots}$$

بخصوص اگر $a = c = e = \cdots$ و $b = d = f = \cdots$ باشد نتیجه میشود :

$$\overbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots}^{m \text{ مرتبه}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

یعنی برای آنکه کسری را بقوهٔ m برسانیم کافی است صورت و مخرج آنرا بقوهٔ m برسانیم تا صورت و مخرج کسر مطلوب بدست آید

تبصره - چون هر عدد صحیح را میتوان کسری با مخرج واحد دانست معلوم میشود که برای ضرب یکعدد صحیح در یک کسر کافی است صورت کسر را در آنعدد ضرب کنیم (و مخرج را در واحد ضرب نمائیم)

۱۳۸- قاعدهٔ تقسیم دو کسر بر یکدیگر - برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر باید کسر مقسومٌ علیه را معکوس کرده آنرا در کسر مقسوم ضرب نمائیم

فرض کنیم مقصود تقسیم کسر $\frac{a}{b} = q$ بر کسر $\frac{c}{d} = q'$ باشد. بموجب تعریف تقسیم $a = bq$ و $c = dq'$ پس داریم $\frac{a}{c} = \frac{bq}{dq'}$

و چون طرفین این تساوی را در $\frac{d}{b}$ ضرب نمائیم حاصل میشود

$$\frac{a \times d}{b \times c} = \frac{bqd}{bdq'} = \frac{q}{q'}$$

پس $\frac{q}{q'} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

تبصره ۱- هرگاه $d = 1$ باشد یعنی مقسومٌ علیه عدد صحیح c باشد داریم $\frac{q}{q'} = \frac{a}{bc}$ یعنی برای تقسیم یک کسر بر یک عدد صحیح کافیست مخرج کسر را در آن عدد صحیح ضرب نمائیم .

واضحست که هرگاه صورت شامل عامل c باشد میتوان این عامل را از صورت و مخرج حذف کرد یعنی برای تقسیم یک کسر بریک عدد صحیح میتوان در صورت امکان صورت کسر را بر آنعدد تقسیم نمود .

تبصره ۲- برای تقسیم عدد ۱ بر کسر $\frac{c}{d}$ بموجب دستور فوق مینویسیم

$$1 : \frac{c}{d} = \frac{1}{1} \times \frac{d}{c} = \frac{d}{c}$$

یعنی خارج قسمت تقسیم عدد واحد بریک کسر عبارت از کسر دیگری است که صورت آن مخرج کسر مقسوم علیه و مخرج آن صورت کسر مقسوم علیه باشد . این کسر را عکس کسر اولی نامند .

مثال ۱- عبارت زیر را خلاصه کنید

$$\frac{2a^2+3a}{4a^3} \times \frac{4a^2-6a}{12a+18}$$

$$\text{عبارت مفروض} = \frac{a(2a+3)\times 2a(2a-3)}{4a^3 \times 6(2a+3)} = \frac{2a-3}{12a}$$

مثال ۲- عبارت زیر را خلاصه نمائید

$$\frac{6x^2-ax-2a^2}{ax-a^2} \times \frac{x-a}{9x^2-4a^2} : \frac{2x+a}{3ax+2a^2}$$

$$\text{عبارت مفروض} = \frac{(6x^2-ax-2a^2)\times(x-a)(3ax+2a^2)}{(ax-a^2)(9x^2-4a^2)(2x+a)}$$

لیکن

$$6x^2-ax-2a^2 = 6x^2-4ax+3ax-2a^2$$

$$=(6x^2-4ax)+(3ax-2a^2) = 2x(3x-2a)+a(3x-2a)$$

$$=(3x-2a)(2x+a)$$

پس

$$\text{عبارت مفروض} = \frac{(3x-2a)(2x+a)(x-a)a(3x+2a)}{a(x-a)(3x-2a)(3x+2a)(2x+a)} = 1$$

تمرینات

عبارات زیر را خلاصه نمائید :

۷۷۹- $\frac{14x^2-7x}{12x^3+24x^2} : \frac{2x-1}{x^2+2x}$

۷۸۰- $\frac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1} : \frac{ab+3}{2a+1}$

۷۸۱- $\frac{x^2-4a^2}{ax+2a^2} \times \frac{2a}{x-2a}$

۷۸۲- $\frac{16x^2-9a^2}{x^2-4} \times \frac{x-2}{4x-3a}$

۷۸۳- $\frac{25a^2-b^2}{9a^2x^2-4x^2} \times \frac{x(3a+2)}{5a+b}$

۷۸۴- $\frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \times \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

۷۸۵- $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-4} \times \frac{x^2+4x}{2x^2+9x+4}$

۷۸۶- $\frac{2x^2+13x+15}{4x^2-9} : \frac{2x^2-12x-45}{4x^2-1}$

۷۸۷- $\frac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45} : \frac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$

۷۸۸- $\frac{b^3-27b}{2b^2+5b} \times \frac{4b^2-25}{2b^2-11b-15}$

۷۸۹- $\frac{x^3-6x^2+36x}{x^2-49} : \frac{x^4+216x}{x^2-x-42}$

-۷۹۰ $\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25} \times \dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8} : \dfrac{x+1}{x^2+5x}$

-۷۹۱ $\dfrac{x^2-18x+80}{x^2-5x-50} \times \dfrac{x^2-6x-7}{x^2-15x+56} \times \dfrac{x+5}{x-1}$

-۷۹۲ $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72} \times \dfrac{x^2-25}{x^2-1} : \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-9x+8}$

-۷۹۳ $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-20} \times \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-x} : \left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-15} \times \dfrac{x+3}{x^2}\right)$

-۷۹۴ $\dfrac{4x^2-16x+15}{2x^2+3x+1} \times \dfrac{x^2-6x-7}{2x^2-17x+21} \times \dfrac{4x^2-1}{4x^2-20x+25}$

-۷۹۵ $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2+ab-ac} \times \dfrac{a}{(a+c)^2-b^2} \times \dfrac{(a-b)^2-c^2}{ab-b^2-bc}$

۷۹۶ $\dfrac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-c^2-2bc} \times \dfrac{a^2-2ac+c^2-b^2}{b^2-2bc+c^2-a^2}$

۷۹۷ $\dfrac{x^2-64}{x^2+24x+128} \times \dfrac{x^2+12x-64}{x^3-64} : \dfrac{x^2-16x+64}{x^2+4x+16}$

۷۹۸ $\dfrac{(a^2+ax)^3}{a^2-x^2} \times \dfrac{(a-x)^2}{a^5+a^2x^3} \times \dfrac{a^2-ax+x^2}{a^3+2a^2x+ax^2}$

جمع و تفریق کسرها

۱۳۹ - برای جمع دو یا چند کسر که دارای یک مخرج باشند صورتها را باهم جمع کرده حاصل را صورت قرار میدهیم و مخرج مشترک را مخرج کسر حاصل جمع قرار میدهیم زیرا دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{b}$ این مفهوم را دارند که واحد را به b قسمت متساوی تقسیم کرده یکبار a قسمت و بار دیگر c قسمت را اختیار نموده ایم پس

فی الجمله $a+c$ قسمت از تقسیمات مزبور را اختیار کرده ایم یعنی مجموع $\frac{a+c}{b}$ است . بعبارت کلی تر اگر $q=\frac{a}{b}$ و $q'=\frac{c}{b}$ فرض شود $a=bq$ و $c=bq'$ است پس $a+c=b(q+q')$ و یا

$$q+q'=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

لیکن اگر کسرها دارای مخرج مشترک نباشند آنها را بمخرج مشترک تحویل مینمائیم.

فرض کنیم مقصود جمع دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ است

برای اینکه مخرج آنها را متساوی کنیم صورت و مخرج اولی را در d (مخرج دومی) وصورت و مخرج دومی را در b (مخرج اولی) ضرب مینمائیم حاصل میشود

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{ad}{bd} \quad و \quad \frac{c}{d}=\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{cb}{bd}$$

و چون مخرجها متساوی شدند میتوان مثل حالت قبل کسرها را با هم جمع کرد :

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{cb}{bd}=\frac{ad\pm cb}{bd}$$

تبصره - هرگاه مخرجهای b و d دارای عامل مشترکی باشند دراینصورت حاصلضرب bd کوچکترین مخرج مشترکی که بر b و d هردو قابل قسمت باشد نیست .

بلکه مخرج ها دارای کوچکترین مضرب مشترکی میباشند که بر تمام مخرجها

قابل قسمت بوده کوچکترین مخرج مشترک مطلوب است وبنابراین قاعده زیر برای جمع کسرها بطور کلّی بدست میآید .

قاعده - برای جمع چندین کسر که دارای مخرج مشترک نباشند کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را حساب کرده آن را مخرج مشترک تمام کسرها قرار میدهیم سپس این مخرج مشترک را بر مخرج هریک از کسرها تقسیم کرده حاصل را در صورت همان کسر ضرب مینمائیم تا صورت جدید آن کسر بدست آید

وقتی که مخرج تمام کسرها یکی شد مجموع جبری تمام صورتها را بدست میآوریم تا صورت کسر مجموع بدست آید

مثال ۱ - دو کسر $\frac{4x}{3x(x^2-a^2)}$ و $\frac{5x}{2a(x-a)}$ را متحد المخرج کنید:

کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها عبارتست از $6ax(x-a)(x+a)$ که چون آنرا بر مخرج هر کسر تقسیم کرده حاصل را در صورتها ضرب نمائیم دو کسر مزبور بکسرهای

$\frac{15x^2(x+a)}{6ax(x-a)(x+a)}$ و $\frac{8a^2}{6ax(x-a)(x+a)}$ تبدیل میشوند

مثال ۲ - مطلوب است محاسبهٔ $\frac{5x-4a}{9a} + \frac{2x+a}{3a}$:

عبارت مفروض $= \frac{6x+3a+5x-4a}{9a} = \frac{11x-a}{9a}$

مثال ۳ - مطلوبست محاسبهٔ $\frac{x-2y}{xy} + \frac{3y-a}{ay} - \frac{3x-2a}{ax}$

مخرج مشترک عبارتست از axy وبنابراین

عبارت مفروض $= \frac{a(x-2y)+x(3y-a)-y(3x-2a)}{axy}$

$$\frac{ax-2ay+3xy-ax-3xy+2ay}{axy} = \frac{0}{axy} = 0$$

تبصره - وقتی مخرج ها عبارات چند جمله ای هستند مخرج مشترک را باید بصورت حاصل ضرب عاملهای اوّل نوشت واز انجام عمل ضرب در مخرج خودداری کرد زیرا این کار تقسیم مخرج مشترک را بر مخرج های جزء تسهیل مینماید چنانکه در مثال زیر دیده می شود

مثال ۴ - مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\frac{2x-3a}{x-2a} - \frac{2x-a}{x-a}$

مخرج مشترک حاصلضرب مخرجها یعنی $(x-2a)(x-a)$ است پس داریم:

عبارت مفروض $= \frac{(2x-3a)(x-a)-(x-2a)(2x-a)}{(x-2a)(x-a)} =$

$$\frac{2x^2-5ax+3a^2-(2x^2-5ax+2a^2)}{(x-2a)(x-a)} =$$

$$\frac{2x^2-5ax+3a^2-2x^2+5ax-2a^2}{(x-2a)(x-a)} = \frac{a^2}{(x-2a)(x-a)}$$

تبصره - اگر کسرهای مفروض بساده ترین صورت تحویل نشده باشند باید قبل از انجام عمل جمع آنها را بساده ترین صورت تحویل نمود .

مثال ۵ - عبارت زیر را خلاصه کنید

$$\frac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2} - \frac{2xy}{2x^2+8xy}$$

$$\frac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2}-\frac{y}{x+4y}=$$ عبارت مفروض

$$=\frac{x^2+5xy-4y^2-y(x-4y)}{x^2-16y^2}=\frac{x^2+5xy-4y^2-xy+4y^2}{x^2-16y^2}$$

$$=\frac{x^2+4xy}{x^2-16y^2}=\frac{x(x+4y)}{(x-4y)(x+4y)}=\frac{x}{x^2-4y}$$

تبصره - وقتی که عامل مشترک مخرج ها ظاهراً معلوم نباشد باید مخرج ها را بعوامل اول تجزیه کرد چنانکه در مثال زیر دیده میشود

مثال ۶ - عبارت زیر را خلاصه کنید $\frac{1}{2x^2+x-1}-\frac{1}{3x^2+4x+1}$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)}+\frac{1}{(3x+1)(x+1)}=$$ عبارت مفروض

$$\frac{3x+1+2x-1}{(2x-1)(x+1)(3x+1)}=\frac{5x}{(2x-1)(x+1)(3x+1)}$$

تبصره - گاهی در جمع چندین کسر بهتر است کسرها را دو بدو باهم جمع کرده خلاصه نمود و حاصل را با کسر سوم جمع نمود و عمل را بهمین طریق ادامه داد چنانکه در مثالهای زیر دیده میشود

مثال ۷ - مطلوب است محاسبهٔ عبارت $\frac{a+3}{a-4}-\frac{a+4}{a-3}-\frac{8}{a^2-16}$:

$$\frac{a+3}{a-4}-\frac{a+4}{a-3}=\frac{a^2-9-(a^2-16)}{(a-4)(a-3}=$$

$$\frac{a^2-9-a^2+16}{(a-4)(a-3)}=\frac{7}{(a-4)(a-3)}$$

$$\frac{7}{(a-4)(a-3)}-\frac{8}{(a-4)(a+4)}\quad\frac{7(a+4)-8(a-3)}{(a-4)(a-3)(a+4)}=$$ و

$$\frac{52-a}{(a-4)(a-3)(a+4)}$$

تبصره - گاهی برای سهولت تعیین مخرج مشترک تغییر علامت یکی از جمله ها ضروری میباشد چنانکه در مثال زیر دیده میشود .

مثال ۸ - مطلوبست تعیین حاصل عبارت

$$\frac{a}{x+a}+\frac{2x}{x-a}-\frac{a(3x-a)}{a^2-x^2}$$

در اینجا مخرج مشترک دو جملهٔ اول x^2-a^2 است و بنابراین اگر در جملهٔ سوم علامت مخرج را تغییر دهیم x^2-a^2 مخرج مشترک خواهد بود .

$$\frac{a}{x+a}+\frac{2x}{x-a}-\frac{a(3x-a)}{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{a(x-a)+2x(x+a)-a(3x-a)}{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{ax-a^2+2x^2+2ax-3ax+a^2}{x^2-a^2}=\frac{2x^2}{x^2-a^2}$$

تمرینات

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

۷۹۹ - $\frac{x-1}{2}+\frac{x+3}{3}+\frac{x+7}{7}$

۸۰۰ - $\frac{2x-1}{3}+\frac{x-5}{6}+\frac{x-4}{4}$

۸۰۱ - $\frac{2x-3}{9}-\frac{x+2}{6}+\frac{5x+8}{12}$

۸۰۲ - $\frac{x-7}{15}+\frac{x-9}{25}-\frac{x+3}{45}$

۸۰۳ - $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$

۸۰۴ - $\frac{a-2b}{2a}-\frac{a-5b}{490}+\frac{a+7b}{8a}$

۸۰۵ - $\frac{a-x}{x}+\frac{a+x}{a}-\frac{a^2-x^2}{2ax}$

۸۰۶ - $\frac{x+2}{17x}-\frac{x-5}{34x}+\frac{x+2}{51x}$

۸۰۷ - $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

۸۰۸ - $\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+4}$

۸۰۹ - $\frac{3}{x-6}-\frac{1}{x+2}$

۸۱۰ - $\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}$

۸۱۱ - $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x+1}{x+2}$

۸۱۲ - $\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}$

۸۱۳ - $\frac{x-4}{x-2}-\frac{x-7}{x-5}$

۸۱۴ - $\frac{a}{x-a}-\frac{a^2}{x^2-a^2}$

۸۱۵ - $\frac{1}{2x-3y}-\frac{x+y}{4x^2-9y^2}$

۸۱۶ - $\frac{x+a}{x-2a}-\frac{x^2+2a^2}{x^2-4a^2}$

۸۱۷ - $\frac{2x^3}{x^2-y^3}-\frac{2x^2}{x^2+xy}$

۸۱۸ - $\frac{x^2}{x-x^3}-\frac{x}{1+x^2}$

۸۱۹ - $\frac{xy}{25x^2-y^2}+\frac{2x^3y}{10x^2y+2xy^2}$

۸۲۰ - $\frac{y}{x(x^2-y^2)}+\frac{x}{y(x^2+y^2)}$

۸۲۱ - $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}+\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$

۸۲۲ - $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}-\frac{2x}{x^2-y^2}$

۸۲۳ - $\frac{5}{1+2x}-\frac{3x}{1-2x}-\frac{4-13x}{1-4x^2}$

۸۲۴ - $\frac{2a}{2a+3b}+\frac{3a}{2a-3b}-\frac{8b^2}{4a^2-9b^2}$

۸۲۵ - $\frac{5x}{6(x^2-1)}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{3(x+1)}$

۸۲۶ - $\frac{1}{2(a-b)}-\frac{1}{2(a+b)}-\frac{b}{a^2-b^2}$

۸۲۷ - $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{3x+6}+\frac{5x}{x^2-4}$

۸۲۸ - $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2-y^2}-\frac{x^3y+xy^3}{x^4-y^4}$

۸۲۹ - $\frac{1}{x^2-7x+12}-\frac{1}{x^2-5x+6}$

۸۳ - $\frac{1}{2x^2-x-1}-\frac{1}{2x^2+x-3}$

۸۳۱ - $\frac{4}{4-7a-2a^2}-\frac{3}{3-a-10a^2}$

۸۳۲ - $\frac{5}{5+x-18x^2} - \frac{2}{2+5x+2x^2}$

۸۳۳ - $\frac{5x}{2(x+1)(x-3)} - \frac{15(x-1)}{16(x-3)(x-2)} - \frac{9(x+3)}{16(x+1)(x-2)}$

۸۳۴ - $\frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-1}$

۸۳۵ - $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$

۸۳۶ - $\frac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z+x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$

۸۳۷ - $\frac{x^2yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2zx}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2xy}{(z-x)(z-y)}$

۸۳۸ - $\frac{p-a}{(p-q)(p-r)} + \frac{q-a}{(q-r)(q-p)} + \frac{r-a}{(r-p)(r-q)}$

۸۳۹ - $\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} + \frac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} + \frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$

۸۴۰ - $\frac{1}{4x-4} - \frac{1}{5x+5} + \frac{1}{1-x^2}$

۸۴۱ - $\frac{3}{1+a} - \frac{2}{1-a} - \frac{5a}{a^2-1}$

۸۴۲ - $\frac{x-a}{x+a} + \frac{a^2+3ax}{a^2-x^2} + \frac{x+a}{x-a}$

۸۴۳ - $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x-1} + \frac{4x}{1-4x^2}$

۸۴۴ - $\frac{1}{6a+6} + \frac{1}{6-6a} - \frac{1}{3a^2-3}$

۸۴۵ - $\frac{3-2x}{2x+3} - \frac{2x+3}{3-2x} - \frac{12}{4x^2-9}$

۱۴۰ - حل معادلات کسری - مثال - مطلوب است حل معادلهٔ

$$\frac{6x-3}{2x+7} = \frac{3x-2}{x+5}$$

حل - دو طرف معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرجها یعنی $(x+5)(2x+7)$ ضرب مینمائیم تا حاصل $(6x-3)(x+5) = (2x+7)(3x-2)$

و یا $6x^2+27x-15 = 6x^2+17x-14$

و یا $10x = 1$ پس $x = \frac{1}{10}$

مثال ۲ - مطلوب است حل معادلهٔ $\frac{8x+23}{20} - \frac{5x+2}{3x+4} = \frac{2x+3}{5} - 1$

ابتدا طرفین معادله را در ۲۰ ضرب مینمائیم تا مخرجهای عددی حذف شوند و حاصل میشود

$$8x+23 - \frac{20(5x+2)}{3x+4} = 8x+12-20$$

و یا $31 = \frac{20(5x+2)}{3x+4}$ حال طرفین را در $3x+4$ ضرب می کنیم

تا حاصل شود $93x+124 = 20(5x+2)$ پس

$84 = 7x$ و $x = 12$

مثال ۳ - مطلوب است حل معادله $\frac{x-8}{x-10} - \frac{x-5}{x-7} = \frac{x-7}{x-9} - \frac{x-4}{x-9}$

حل - در هر یک از دو طرف معادله علیحده مخرج مشترک می گیریم تا حاصل شود

$$\frac{(x-8)(x-7)-(x-5)(x-10)}{(x-10)(x-7)} = \frac{(x-7)(x-6)-(x-4)(x-9)}{(x-9)(x-6)}$$

ویا $\frac{x^2-15x+56-x^2+15x-50}{(x-10)(x-7)} = \frac{x^2-13x+42-x^2+13x-36}{(x-9)(x-6)}$

ویابالأخره $\frac{6}{(x-10)(x-7)} = \frac{6}{(x-9)(x-6)}$ در این کسرها چون صورتها یکی است باید مخرجها نیز متساوی باشند پس $(x-10)(x-7)=(x-9)(x-6)$

ویا $x^2-17x+70 = x^2-15x+54$

از آنجا $16=2x$ ویا $x=8$

تمرینات

معادلات زیر را حل کنید :

۸۴۶ــ $\frac{x+4}{3x-8} = \frac{x+5}{3x-7}$

۸۴۷ــ $\frac{3x+1}{3(x-2)} = \frac{x-2}{x-1}$

۸۴۸ــ $\frac{7-5x}{1+x} = \frac{11-15x}{1+3x}$

۸۴۹ــ $\frac{6x+13}{15} - \frac{3x+5}{5x-25} = \frac{2x}{5}$

۸۵۰ــ $\frac{6x+8}{2x+2} - \frac{2x+38}{x+12} = 1$

۸۵۱ــ $\frac{3x-1}{2x-1} - \frac{4x-2}{3x-1} = \frac{1}{6}$

۸۵۲ــ $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x+6} = 1$

۸۵۳ــ $\frac{6x+7}{9x+6} = \frac{1}{12} + \frac{5x-5}{12x+8}$

۸۵۴ــ $\frac{2x-5}{5} - \frac{x-3}{2x-15} = \frac{4x-3}{10} - \frac{11}{10}$

۸۵۵ــ $\frac{(2x-1)(3x+8)}{6x(x+4)} - 1 = 0$

۸۵۶ــ $\frac{2x+5}{5x+3} - \frac{2x+1}{5x+2} = 0$

۸۵۷ــ $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x+1} = \frac{5}{2x+6} - \frac{2.5}{2x+2}$

۸۵۸ــ $\frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x}$

۸۵۹ــ $\frac{25-\frac{x}{3}}{x+1} - \frac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2} = 5 + \frac{23}{x+1}$

۸۶۰ــ $\frac{30+6x}{x+1} + \frac{60+8x}{x+3} = 14 + \frac{48}{x+1}$

۸۶۱ــ $\frac{x+5}{x+4} - \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-15}{x-16}$

۸۶۲ــ $\frac{x-7}{x-9} - \frac{x-9}{x-11} = \frac{x-13}{x-15} - \frac{x-15}{x-17}$

۸۶۳ــ $\frac{x+3}{x+6} - \frac{x+6}{x+9} = \frac{x+2}{x+5} - \frac{x+5}{x+8}$

۸۶۴ــ $\frac{4x-17}{x-4} - \frac{10x-13}{2x-3} = \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}$

۸۶۵ــ $\frac{5y-8}{y-2} + \frac{6y-44}{y-7} = \frac{10y-8}{y-1} - \frac{y-8}{y-6}$

۱۴۱ـ کسرهای مرکّب ـ هرگاه در کسری صورت یا مخرج یا هردو آنها بنوبه خود کسر جدیدی باشند کسر اولی را کسر مرکب مینامند مانند کسرهای $\frac{a}{\frac{m}{n}}$ یا $\frac{\frac{x}{y}}{b}$

و بالأخره $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ که کلّی ترین صورت کسر مرکّب است درحالت اخیر گاهی دو مقدار a و d را که در بالا و پائین قرار گرفته اند طرفین و دو مقدار b و c را وسطین می نامند .

۱۴۲ - خلاصه کردن کسرهای مرکّب - بنابرآنچه راجع بتقسیم کسرها گفتیم کسر $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ در واقع خارج قسمت کسر $\frac{a}{b}$ را بر $\frac{c}{d}$ نشان میدهد بنابراین

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

و حالات مخصوص زیر را نیز باید همواره در نظر داشت :

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 : \frac{a}{b} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = a : \frac{1}{b} = a \times b = ab$$

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{a} \times b = \frac{b}{a}$$

مثال ۱ - عبارت $\frac{\frac{a+x}{a}}{\frac{a^2-x^2}{ab}}$ را خلاصه کنید :

بنابرآنچه گفته شد حاصلضرب طرفین صورت کسر حاصل و حاصلضرب وسطین مخرج آن میباشد پس $\text{کسر مفروض} = \frac{ab(a+x)}{a(a^2-x^2)} = \frac{b}{a-x}$

مثال ۲ - عبارت $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}$ را خلاصه کنید

هریک از صورت و مخرج را علیحده خلاصه مینمائیم :

$$\text{صورت} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\text{مخرج} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

حال آنها را بیکدیگر تقسیم مینمائیم تا حاصل شود :

$$\text{عبارت مفروض} = \frac{ad+bc}{bd} : \frac{ad-bc}{bd} = \frac{ad+bc}{ad-bc}$$

مثال ۳ - عبارت $\frac{x+\frac{a^2}{x}}{x-\frac{a^4}{x^3}}$ را خلاصه کنید .

در اینمورد کافی است صورت و مخرج را در x^3 ضرب کنیم تا حاصل شود :

$$\text{عبارت مفروض} = \frac{x^4+a^2x^2}{x^4-a^4} = \frac{x^2(a^2+x^2)}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)} = \frac{x^2}{x^2-a^2}$$

مثال ۴ - عبارت $\frac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}}$ را خلاصه کنید

هرگاه صورت و مخرج را در a^2-b^2 که کوچکترین مضرب مشترک کسرهای صورت و کسرهای مخرج است ضرب نمائیم حاصل میشود :

$$\text{عبارت مفروض} = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)^2-(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2-2ab-a^2-b^2-2ab}$$

$$= \frac{2a^2+2b^2}{-4ab} = -\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

تمرینات

عبارات زیر را خلاصه نمائید :

۸۶۶ - $\frac{\frac{m}{n}-\frac{b}{m}}{\frac{a}{m}-\frac{b}{n}}$ ۸۶۷ - $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

-۸۶۸ $\dfrac{1+\dfrac{c}{x}}{\dfrac{b}{x}-1}$

-۸۶۹ $\dfrac{2+\dfrac{3a}{4b}}{a+\dfrac{8b}{3}}$

-۸۷۰ $\dfrac{1}{a+\dfrac{b}{c}}$

-۸۷۱ $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{a}}$

-۸۷۲ $\dfrac{x}{x-\dfrac{m}{n}}$

-۸۷۳ $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$

-۸۷۴ $\dfrac{x+5+\dfrac{6}{x}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x^2}}$

-۸۷۵ $\dfrac{2x^2-x-6}{\dfrac{4}{x^2}-1}$

-۸۷۶ $\dfrac{\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{3}-2}{\dfrac{a}{6}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{a}}$

-۸۷۷ $\dfrac{2}{1-x^2}:\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

-۸۷۸ $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a+b}\right):\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$

-۸۷۹ $\left(y+\dfrac{xy}{y-x}\right)\left(y-\dfrac{xy}{x+y}\right)\times\dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$

-۸۸۰ $\left(\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}\right):\left(\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}\right)$

-۸۸۱ $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}$

-۸۸۲ $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$

-۸۸۳ $\dfrac{1}{a-\dfrac{a^2-1}{a+\dfrac{1}{a-1}}}$

-۸۸۴ $\dfrac{1}{4x+\dfrac{4x}{1+\dfrac{2(x+y)}{6-x}}}$

-۸۸۵ $\dfrac{a}{x+\dfrac{m}{y+\dfrac{n}{z}}}$

-۸۸۶ $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$

-۸۸۷ $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$

-۸۸۸ $\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}:\dfrac{1+\dfrac{a^2-b}{a^2+b^2}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

-۸۸۹ $\dfrac{a-x}{a^2-ax-\dfrac{(a-x)^2}{1-\dfrac{a}{x}}}$

بخط جواد شریفی

(ملک الخطاطین)

[illegible] ۱۹

فارسی ۱۸

[illegible] ۱۸









